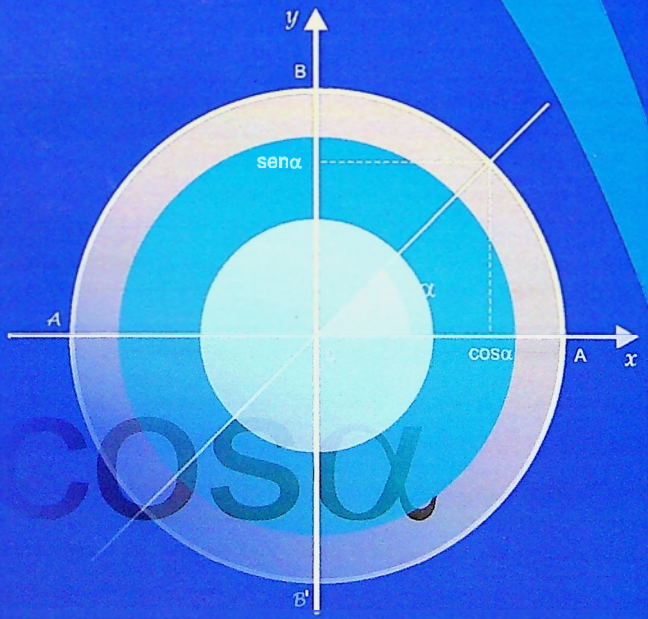
SOLUCIONÁRIO

NOÇÕES DE MATEMÁTICA



VOLUME 3

Trigonometria

Marcílio Miranda

Índice

Capitulo 1 – Medidas de arcos e ângulos 13

Capitulo 2 – Razões Trigonométricas no Triangulo Retângulo: Seno, Cosseno e Tangente 17

Capitulo 3 – Circunferência trigonométrica 31

Capitulo 4 – Seno e Cosseno 39

Capitulo 5 – Tangente e Cotangente 47

Capitulo 6 – Secante e Cossecante 59

Capitulo 7 – Redução ao 1º Quadrante 67

Capitulo 8 – Equações Simples 71

Capitulo 9 – Primeiras Fórmulas Trigonométricas 95

Capitulo 10 – Fórmulas de Arco Dobro, Arco Triplo e Arco Metade 111

Capitulo 11 – Transformação em Produto 119

Capitulo 12 – Equações Trigonométricas 135

Capitulo 13 – Inequações Trigonométricas 157

Capitulo 14 – Resolução de Triângulos 173

Capitulo 15 – Funções Trigonométricas 189

Capitulo 16 – Cálculo de Periodos e construção de Gráficos 197

Capitulo 17 – Funções Trigonométricas Inversas 205

Bibliografia 217

Apêndice – Radicais Duplos 218

Tabela de Razões Trigonométricas 221

Capítulo 1

Medidas de Arcos e Ângulos

Capítulo 1
Medidas e Arcos e Ângulos

Questão – 1.8

Solução:

Unidade	Centímetros
1	0,2
4,5	x

Temos que:

$$x = 0,2 \cdot 4,5 = 0,9\,cm$$

Questão – 1.9

Solução:

Unidade	Centímetros
2,5	10
1	x

Temos que:

$$2,5x = 10 \Rightarrow x = \frac{10}{2,5} = 4\ cm$$

Questão – 1.10

Solução:

Unidade	Comprimento
1	2r
x	$2\pi r$

Temos que:

$$2rx = 2\pi r \Rightarrow x = \frac{2\pi r}{2r} = \pi$$

unidades

Questão – 1.11

Solução:

$$2 = \frac{5}{r} \Rightarrow 2r = 5 \Rightarrow r = \frac{5}{2}$$

$$3 = \frac{5}{R} \Rightarrow 3R = 5 \Rightarrow R = \frac{5}{3}$$

Temos que:

$$\frac{r}{R} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{3}} = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{2}$$

Questão – 1.12

Solução:

$$\alpha = \frac{AB}{r} \Rightarrow AB = \alpha r$$

$$\alpha = \frac{CD}{2r} \Rightarrow CD = 2\alpha r$$

Temos que::

$$\frac{AB}{CD} = \frac{\alpha r}{2\alpha r} = \frac{1}{2}$$

Questão – 1.13

Solução:

Grau	Radianos
180	π
15	x

Temos que::

$$180x = 15\,\pi \Rightarrow x = \frac{15\pi}{180} = \frac{\pi}{12}$$

Analogamente temos que:

$$18^{\circ} = \frac{\pi}{10},\ 20^{\circ} = \frac{\pi}{9} \text{ e } 50^{\circ} = \frac{5\pi}{18}$$

Questão – 1.14

Solução:

$15°19' = 15 \cdot 60 + 19$ minutos

$180° = 180 \cdot 60 = 10800$ minutos

Minutos	Radianos
10800	3,14
919	x

Temos que::

$$10800x = 919 \cdot 3{,}14 \Rightarrow x = \frac{2885{,}66}{10800} = 0{,}267 \approx 0{,}27$$

Capítulo 2

Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo: Seno, Cosseno e Tangente

Capítulo 2
Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo: Seno, Cosseno e Tangente

Parte 1 - Exercícios Propostos

Questão – 2.7

Solução:

Usando o teorema de Pitágoras no triângulo ACD temos que:

$$3^2 + m^2 = 5^2 \Rightarrow m^2 = 16 \Rightarrow m = 4$$

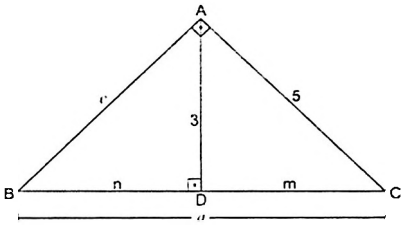


Fig.1.

Usando a relação altura ao quadrado é igual ao produto das projeções temos que:

$$3^2 = m \cdot n \Rightarrow 9 = 4 \cdot n \Rightarrow n = \frac{9}{4}$$

Usando o teorema de Pitágoras no triângulo ABD temos que:

$$3^2 + \left(\frac{9}{4}\right)^2 = c^2 \Rightarrow c^2 = \frac{144 + 81}{16} \Rightarrow c = \frac{15}{4}$$

Claramente a hipotenusa mede m + n, logo:

$$a = m + n = 4 + \frac{9}{4} = \frac{25}{4}$$

Questão- 2.8

Solução:

É fácil ver que $a = 1 + 3 = 4$

Usando a relação altura ao quadrado é igual ao produto das projeções temos que:

$$h^2 = 1 \cdot 3 \Rightarrow h = \sqrt{3}$$

Usando a relação cateto ao quadrado é o produto da hipotenusa pela sua projeção sobre ela:

$$b^2 = a \cdot m \Rightarrow b^2 = 4 \cdot 3 \Rightarrow b = 2\sqrt{3}$$

Analogamente temos que:

$$c^2 = a \cdot n \Rightarrow c^2 = 4 \cdot 1 \Rightarrow c = 2$$

Questão – 2.9

Solução:

Usando a relação altura ao quadrado é igual ao produto das projeções temos que

$$h^2 = m \cdot n \Rightarrow \left(\sqrt{5}\right)^2 = 5 \cdot n \Rightarrow n = 1$$

É fácil ver que $a = 5 + 1 = 6$

Usando a relação cateto ao quadrado é o produto da hipotenusa pela sua projeção sobre ela:

$$b^2 = a \cdot m \Rightarrow b^2 = 6 \cdot 5 \Rightarrow b = \sqrt{30}$$

Analogamente temos que:

$$c^2 = a \cdot n \Rightarrow c^2 = 6 \cdot 1 \Rightarrow c = \sqrt{6}$$

Questão – 2.10

Solução:

Usando a relação altura ao quadrado é igual ao produto das projeções temos que

$$h^2 = 3m$$

Usando teorema de Pitágoras temos que

$$h^2 + m^2 = 4 \Rightarrow 3m + m^2 = 4 \Rightarrow m^2 + 3m - 4 = 0$$

Assim, concluímos que m = 1.

Temos que:

$$h^2 = 3m = 3 \Rightarrow h = \sqrt{3}$$

Daí é fácil ver que a = 1 + 3 = 4

Usando a relação cateto ao quadrado é o produto da hipotenusa pela sua projeção sobre ela:

$$c^2 = a \cdot n \Rightarrow c^2 = 3 \cdot 4 \Rightarrow c = 2\sqrt{3}$$

Questão – 2.11

Note que AD = 1000m

Temos que:

$$tg45^\circ = \frac{AD}{CD} = \frac{1000}{CD} \Rightarrow CD = 1000$$

Analogamente temos que

$$tg30^\circ = \frac{AD}{BD} = \frac{1000}{BD} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1000}{BD} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BD = 1000\sqrt{3} \approx 1.732m$$

Logo BC = BD + CD = 2.732m *

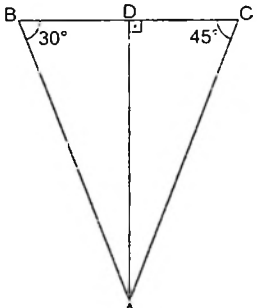


Fig. 2.

* Neste problema devemos utilizar $tg30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ para obtermos o gabarito 2.732. Caso tivéssemos utilizado $tg30^\circ = 0,58$ o resultado seria 2.724.

Questão – 2.12

Solução 1:

Seja $OD = x$ e $AD = y$.

Trace AO e observe que $\angle CAO = 20^{\circ}$ e $\angle AOD = 40^{\circ}$

$$\text{sen}40^{\circ} = 2 \cdot \text{sen}20^{\circ} \cdot \cos 20^{\circ} = 2 \cdot 0{,}34 \cdot 0{,}94 = 0{,}6392$$

$$\text{sen}40^{\circ} = \frac{y}{4} \Rightarrow 0{,}6392 = \frac{y}{4} \Rightarrow y \approx 2{,}55$$

Como CE é diâmetro e $AB \perp CE$ temos que $AD = BD$.

Assim temos que $AB = 2 \cdot AD = 2 \cdot (2{,}55) = 5{,}1$.

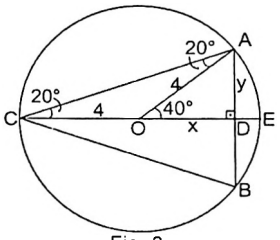


Fig. 3.

Solução 2:

Como CE é diâmetro temos que $\angle CAE = 90^{\circ}$ (Veja Fig. 4)

Usando a relação altura ao quadrado é igual ao produto das projeções temos que:

$$y^2 = (4 - x) \cdot (4 + x) \Rightarrow y^2 + x^2 = 16 \quad \text{(I)}$$

Por outro lado temos que:

$$\text{tg}20^{\circ} = \frac{\text{sen}20^{\circ}}{\cos 20^{\circ}} = \frac{0{,}34}{0{,}94} = \frac{34}{94} = \frac{17}{47} = \frac{y}{x+4} \Rightarrow y^2 = \frac{17^2}{47^2} \cdot (x+4)^2$$

Substituindo em (I) temos que:

$$\frac{17^2}{47^2}\cdot(x+4)^2 + x^2 = 16 \Rightarrow 2498x^2 + 2612x - 30720 = 0$$

$$1249x^2 + 1306x - 15360 = 0$$

Concluímos que $x \approx 3{,}02$

E como $y^2 = \frac{17^2}{47^2}\cdot(x+4)^2 \Rightarrow y \approx 2{,}54 \Rightarrow AB = 2\cdot(2{,}54) \approx 5{,}1$

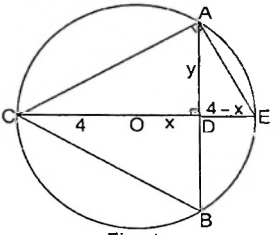


Fig. 4.

Questão – 2.13

Solução:

Da figura 5, temos que:

$$tg25^\circ = \frac{y}{8} \Rightarrow 0{,}47 = \frac{y}{8} \Rightarrow y = 3{,}76$$

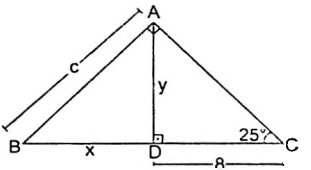


Fig. 5.

Usando a relação altura ao quadrado é igual ao produto das projeções temos que

$$y^2 = 8x \Rightarrow x = \frac{14{,}1376}{8} = 1{,}7672$$

Usando o teorema de Pitágoras, temos que:

$$c^2 = (3{,}76)^2 + (1{,}7672)^2 \approx 14{,}14 + 3{,}12 \approx 17{,}26 \Rightarrow c \approx 4{,}1$$

Questão – 2.14

Solução:

$$\text{tg}87^\circ = \frac{30}{z} \Rightarrow 19{,}1 = \frac{30}{x} \Rightarrow x = \frac{30}{19{,}1} \approx 1{,}6$$

$$\text{tg}58^\circ = \frac{30}{x} \Rightarrow 1{,}6 = \frac{z}{30} \Rightarrow z = 30 \cdot 1{,}6 = 48$$

Assim, concluímos que a altura do prédio é:

$$48 + 1{,}6 = 49{,}6\,.$$

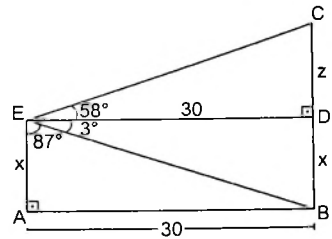


Fig. 6.

Questão – 2.15

Solução:

Como α é um ângulo agudo, temos que $\text{sen}\alpha > 0$.

Por outro lado, temos que:

$$(\text{sen}\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{3\sqrt{5}}{7}$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{3\sqrt{5}}{7}} = \frac{2}{3\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{15}$$

Questão – 2.16

Solução:

Como α é um ângulo agudo temos que $\text{sen}\alpha > 0$ e $\cos\alpha > 0$.

$$\text{tg}\alpha = 3 \Rightarrow \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = 3 \Rightarrow \text{sen}\alpha = 3 \cdot \cos\alpha \Rightarrow \text{sen}^2\alpha = 9 \cdot \cos^2\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha + 9 \cdot \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10} \Rightarrow \text{sen}\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

Questão – 2.17

Solução:

$$\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1+\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \left(\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\cos\alpha}\right)^2 = \left(\frac{1+\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 =$$

$$= \frac{(1+\operatorname{sen}\alpha)^2}{\cos^2\alpha} = \frac{(1+\operatorname{sen}\alpha)\cdot(1+\operatorname{sen}\alpha)}{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{(1+\operatorname{sen}\alpha)\cdot(1+\operatorname{sen}\alpha)}{(1-\operatorname{sen}\alpha)\cdot(1+\operatorname{sen}\alpha)} = \frac{(1+\operatorname{sen}\alpha)}{(1-\operatorname{sen}\alpha)}$$

Questão – 2.18

Solução:

$$\cos^6 x = \left(\cos^2 x\right)^3 = \left(1-\operatorname{sen}^2 x\right)^3 = 1-3\operatorname{sen}^2 x + 3\operatorname{sen}^4 x - \operatorname{sen}^6 x$$

$$\cos^4 x = \left(\cos^2 x\right)^2 = \left(1-\operatorname{sen}^2 x\right)^2 = 1-2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^4 x$$

Substituindo na equação original, temos que:

$$\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x - \operatorname{sen}^4 x - \cos^4 x + \operatorname{sen}^2 x =$$

$$= \operatorname{sen}^6 x + \left(1-3\operatorname{sen}^2 x + 3\operatorname{sen}^4 x - \operatorname{sen}^6 x\right) - \operatorname{sen}^4 x - (1-2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^4 x) + \operatorname{sen}^2 x =$$

$$= \operatorname{sen}^4 x$$

Parte 2 – Exercícios Suplementares

Questão – I.1

Sabemos que $\ell = \alpha \cdot r$

Temos que:

$$r = \frac{\ell}{\alpha} \Rightarrow S = \frac{\ell \cdot r}{2} = \frac{\ell \cdot \frac{\ell}{\alpha}}{2} = \frac{\ell^2}{2\alpha}$$

A área a ser calculada é exatamente a diferença a área do setor maior e a área do setor menor.

$$S = \frac{\ell_2^2}{2\alpha} - \frac{\ell_1^2}{2\alpha} = \frac{\ell_2^2 - \ell_1^2}{2\alpha}$$

Questão – I.2

Solução:

$$\frac{\ell_2^2 - \ell_1^2}{2\alpha} = \frac{(\ell_2 - \ell_1)\cdot(\ell_2 + \ell_1)}{2\alpha} = \frac{(\ell_2 - \ell_1)\cdot\left(\frac{5\pi}{3}\right)}{2\alpha} = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \ell_2 - \ell_1 = \alpha$$

Note que:

$\ell_2 = \alpha \cdot r_2 = \alpha \cdot OA_2$

$\ell_1 = \alpha \cdot r_1 = \alpha \cdot OA_1$

Assim, temos que:

$$\ell_2 - \ell_1 = \alpha \cdot OA_2 - \alpha \cdot OA_1 = \alpha \cdot (OA_2 - OA_1) \Rightarrow OA_2 - OA_1 = 1$$

Questão – I.3

Solução:

$$\begin{cases} a + 2b = \frac{7\pi}{3} & (I) \\ 2a + 3b = \frac{23\pi}{6} & (II) \end{cases}$$

Fazendo (II) – 2.(I) temos que:

$$-b = \frac{23\pi}{6} - 2\cdot\left(\frac{7\pi}{3}\right) = -\frac{5\pi}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = \frac{5\pi}{3} = 150^c \Rightarrow a = \frac{4\pi}{3} = 120^\circ$$

Questão – I.4

Solução:

Radianos	Grado
π	200
α	x

Temos que:

$$\pi x = 200\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\pi x}{200}$$

Questão – I.5

Solução:

Seja H = altura da maior torre e h = altura da menor torre

$$tg60^\circ = \frac{H}{10\sqrt{3}} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{H}{10\sqrt{3}} \Rightarrow H = 30$$

$$tg30^\circ = \frac{h}{10\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{10\sqrt{3}} \Rightarrow h = 10$$

$$tg60 = \frac{CD}{10} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{CD}{10} \Rightarrow CD = 10\sqrt{3}$$

$$EC = H - h = 30 - 10 = 20$$

Usando o teorema de Pitágoras, temos que:

$$(20)^2 + \left(10\sqrt{3}\right)^2 = (DE)^2 \Rightarrow DE = 10\sqrt{7}$$

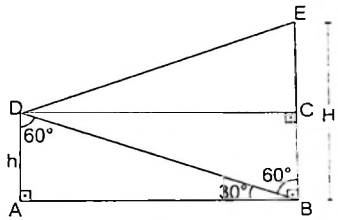


Fig. 7.

Questão – I.6

Solução:

Usando o teorema de Pitágoras, temos que:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 64 \\ 4x^2 + y^2 = 100 \end{cases}$$

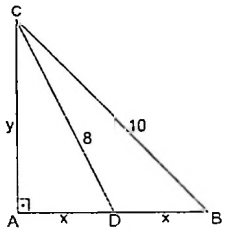


Fig. 8.

Temos que:

$$3x^2 = 36 \Rightarrow x = 2\sqrt{3} \Rightarrow y = 2\sqrt{13} \Rightarrow \text{senC} = \frac{2x}{10} = \frac{4\sqrt{3}}{10} \approx 0{,}69$$

Logo o ângulo C mede 44°, portanto, o ângulo B mede 46°

Questão – I.7

Solução:

Seja BC = a , AC = 3a e AB = x

Usando o teorema de Pitágoras, temos que:

$x^2 + a^2 = (3a)^2 \Rightarrow x = 2\sqrt{2}a$

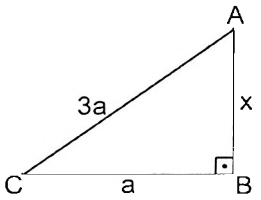


Fig. 9.

Temos que::

$$\text{sen}C = \frac{2\sqrt{2}a}{3a} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{sen}A = \frac{a}{3a} = \frac{1}{3}$$

$$(\text{sen}A + \text{sen}C)^2 = \left(\frac{2\sqrt{2}+1}{3}\right)^2 = \frac{9+4\sqrt{2}}{9}$$

Questão – I.8

Solução:

$$1 + \text{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha \Rightarrow 1 + \left(1+\sqrt{2}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 4 + 2\sqrt{2} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{4+2\sqrt{2}} \cdot \frac{4-2\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}} = \frac{4-2\sqrt{2}}{8} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

Como $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, temos que:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

Questão – I.9

Solução:

a) $\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha = m \Rightarrow (\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)^2 = m^2$

$\operatorname{sen}^2\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha + \cos^2\alpha = m^2$

$1 + 2 \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha = m^2 \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha = \dfrac{m^2 - 1}{2}$

b) $\operatorname{tg}\alpha + \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{m^2-1}{2}\right)} = \dfrac{2}{m^2 - 1}$

Questão – I.10

Solução:

$$y = \left[a \cdot \left(\cos^4 x + \operatorname{sen}^4 x\right) + 2a \cdot \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x\right] - 2 \cdot \left(\operatorname{sen}^4 x + 2\cos^2 x - \cos^4 x\right) =$$

$$= \left[a \cdot \left(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x\right)^2\right] - 2 \cdot \left(\operatorname{sen}^4 x + 2\cos^2 x - \cos^4 x + \cos^4 x - \cos^4 x\right) =$$

$$= a \cdot 1 - 2 \cdot \left(\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x - 2\cos^4 x + 2\cos^2 x\right) =$$

$$= a - 2\left(\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x - 2\cos^4 x + 2\cos^2 x\right) =$$

$$= a - 2 \cdot \left(\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x + 2\cos^2 x \cdot \left(1 - \cos^2 x\right)\right) =$$

$$= a - 2 \cdot \left(\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x + 2\cos^2 x \cdot \left(\operatorname{sen}^2 x\right)\right) =$$

$$= a - 2 \cdot \left(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x\right)^2 = a - 2$$

Capítulo 3

Circunferência Trigonométrica

Capítulo 3
Circunferência Trigonométrica

Questão – 3.11

Solução:

a) $x_B - x_A = -1 \Rightarrow 4 - x_A = -1 \Rightarrow x_A = 5$

b) $-5 - x_A = \frac{3}{2} \Rightarrow -5 - x_A = -\frac{13}{2}$

Questão – 3.12

Solução:

a) Seja $x_P = a \Rightarrow AP = a + 3$, $AC = 2$ e $BP = a - 2$

$$AP + AC + BP = (a+3) + 2 + (a-2) = 2a + 3 = 0 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

b) Seja $x_P = b \Rightarrow AP = b + 3$ e $PB = 2 - b$

$$AP - PB = (b+3) - (2-b) = 2b + 1 = 6 \Rightarrow b = \frac{5}{2}$$

Nota: Observe que minha resposta diverge do gabarito do livro;

O gabarito diz que $b = 0$ ou -1.

Se $b = 0$, teremos $AP = (0 - (-3)) = 3$ e $PB = (2 - 0) = 2 \Rightarrow AP - PB = 1$.

Se $b = -1$ teremos $AP = (-1 - (-3)) = 2$ e $PB = (2 - (-1)) = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow AP - PB = -1$

Isso mostra claramente que o gabarito está errado

Questão – 3.13 Resolvida atrás do livro-texto

Questão – 3.14

a) $\dfrac{\frac{43\pi}{6}}{2\pi} = \dfrac{43}{12} \approx 3{,}58$

Esse ângulo dá 3 voltas completas no ciclo trigonométrico.

A primeira determinação positiva do arco é:

$$\frac{43\pi}{6} - 3 \cdot (2\pi) = \frac{7\pi}{6}$$

b) $\dfrac{1418}{360} \approx 3{,}93$

Esse ângulo dá 3 voltas completas no ciclo trigonométrico.

A primeira determinação positiva do arco é:

$$1418^\circ - 3 \cdot \left(360^\circ\right) = 338^\circ$$

c) $\dfrac{-\frac{35\pi}{2}}{2\pi} = -\dfrac{35}{4} = -8{,}75$

Esse ângulo dá 8 voltas completas (no sentido negativo) no ciclo trigonométrico.

A primeira determinação positiva do arco é:

$$-\frac{35\pi}{2} + 9 \cdot (2\pi) = \frac{\pi}{2}$$

d) $-\dfrac{1070}{360} \approx -2{,}97$

Esse ângulo dá 2 voltas completas (no sentido negativo) no ciclo trigonométrico.

A primeira determinação positiva do arco é:

$$-1070^\circ + 3 \cdot \left(360^\circ\right) = 10^\circ$$

Questão – 3.15

a) $\frac{-\frac{11\pi}{6}}{2\pi} = -\frac{11}{12} < -1$

Esse ângulo não chega a completar a primeira volta (no sentido negativo) no ciclo trigonométrico.

Portanto, a primeira determinação positiva do arco é:

$$-\frac{11\pi}{6} + 1 \cdot (2\pi) = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$$

Logo, o arco está no primeiro quadrante.

b) $-\frac{2000}{360} \approx -5,55$

Esse ângulo dá 5 voltas completas (no sentido negativo) no ciclo trigonométrico.

Portanto, a primeira determinação positiva do arco é:

$$-2000^\circ + 6 \cdot \left(360^\circ\right) = 160^\circ$$

Logo, o arco está no segundo quadrante.

c) $\frac{820}{360} \approx 2,27$

Esse ângulo dá 2 voltas completas no ciclo trigonométrico.

Portanto, a primeira determinação positiva do arco é:

$$820^\circ - 2 \cdot \left(360^\circ\right) = 100^\circ$$

Logo, o arco está no segundo quadrante.

d) $\dfrac{\frac{31\pi}{4}}{2\pi} = \dfrac{31}{8} = 3{,}875$

Esse ângulo dá 3 voltas completas no ciclo trigonométrico.

Portanto, a primeira determinação positiva do arco é:

$$\frac{31\pi}{4} - 3\cdot(2\pi) = \frac{7\pi}{4} = 315^\circ$$

Logo, o arco está no quarto quadrante.

Questão – 3.16 – Resolvida atrás do livro-texto

Questão – 3.17 – Resolvida atrás do livro-texto

Questão – 3.18

Solução:

$$E = \left\{\frac{2\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{\frac{(6k+2)\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{\frac{2\pi}{6}, \frac{8\pi}{6}, \frac{14\pi}{6}, \frac{20\pi}{6}, \frac{26\pi}{6}, \frac{32\pi}{6}, \ldots\right\} =$$

$$F = \left\{\frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{\frac{(6k+5)\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}\right\} =$$

$$= \left\{\frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{16\pi}{6}, \frac{22\pi}{6}, \frac{28\pi}{6}, \frac{34\pi}{6}, \ldots\right\}$$

Temos que: $E \cup F = \left\{\frac{2\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{8\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{14\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}, \ldots\right\}$ forma uma P.A. de razão $\dfrac{3\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2}$.

Assim podemos desconfiar que:

$$E \cup F = \left\{\frac{(3k+2)\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Vamos provar isso.

Seja $A = E \cup F$ e

$$B = \left\{ \frac{(3k+2)\pi}{6},\ k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Vamos provar que $A = B$.

Primeira Parte: provar que $A \subset B$

Prova:

Seja $a \in A$. Temos que $a = 6q + 2$ ou $a = 6t + 5$ onde q e t são números Inteiros.

Assim, temos que $a = 3 \cdot (2q) + 2$ ou $a = 3 \cdot (2t + 1) + 2$

Em qualquer caso, temos que $a \in B$, logo $A \subset B$.

Segunda Parte: provar que $B \subset A$

Prova:

Seja $b \in B$. temos que $b = 3s + 2$ onde s é um número inteiro.

Agora temos dois casos a analisar:

Se s é par, então $b = 3(2h) + 2 = 6h + 2$ e daí $b \in A$.

Se s é ímpar, então $b = 3(2w + 1) + 2 = 6w + 5$ e daí $b \in A$.

Em qualquer caso, temos que $b \in A$, logo $B \subset A$.

Como $B \subset A$ e $A \subset B$ temos que $A = B$.

Questão – 3.19 – Essa questão deve ser resolvida usando o mesmo raciocínio da ***Questão – 3.18***.

Questão – 3.20

a) Marcando os pontos P_1 e P_2, a circunferência fica dividida em 2 partes iguais. Os pontos estão separados por arcos de medida $\frac{2\pi}{2} = \pi$, logo a expressão geral será $x = \frac{\pi}{5} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

b) Essa questão segue o mesmo raciocínio da letra **a**

c) Essa questão segue o mesmo raciocínio da letra **a**

Questão – 3.21

São só dois pontos

Vamos dividir em dois conjuntos

$$A = \left\{x = (-1)^k \alpha + k\pi,\ \text{onde } k \text{ é par}\right\} =$$

$$= \{..., \alpha - 2\pi, \alpha, \alpha + 2\pi, \alpha + 4\pi, \alpha + 6\pi, \alpha + 8\pi, ...\}$$

Note que todos os elementos de **A** são côngruos, pois a diferença entre quaisquer dos termos é múltiplo de 2π.

$$B = \left\{x = (-1)^k \alpha + k\pi, \text{onde k é ímpar}\right\} =$$

$$= \{..., -\pi - \alpha, \pi - \alpha, 3\pi - \alpha, 5\pi - \alpha, 7\pi - \alpha, 9\pi - \alpha, ...\}$$

Note que todos os elementos de B são côngruos, pois a diferença entre quaisquer dos termos é múltiplo de 2π.

Portanto, há somente 2 pontos distintos: α e $\pi - \alpha$.

Capítulo 4

Seno e Cosseno

Capítulo 4
Seno e Cosseno

Questão – 4.9

Solução:

$$\frac{-2187}{360^{\circ}} = -6{,}075$$

Esse ângulo dá 6 voltas completas (no sentido negativo) no ciclo trigonométrico.

Portanto, a primeira determinação positiva do arco é:

$$-2187^{\circ} + 7\left(360^{\circ}\right) = 333^{\circ}$$

Logo, o arco está no quarto quadrante e, portanto o cosseno é positivo.

Questão – 4.10

Solução:

$$\frac{-3295^{\circ}}{360^{\circ}} \approx -9{,}15$$

Esse ângulo dá 9 voltas completas (no sentido negativo) no ciclo trigonométrico.

Portanto, a primeira determinação positiva do arco é:

$$-3295^{\circ} + 10 \cdot \left(360^{\circ}\right) = 305^{\circ}$$

Logo, o arco está no quarto quadrante e, portanto, o seno é negativo.

Questão – 4.11

Solução:

$$\frac{3465^{\circ}}{360^{\circ}} = 9{,}625$$

Esse ângulo dá 9 voltas completas no ciclo trigonométrico.

Portanto, a primeira determinação positiva do arco é:

$$3465^{\circ} - 9 \cdot \left(360^{\circ}\right) = 225^{\circ}$$

Logo, $\cos\left(3465^{\circ}\right) = \cos\left(225^{\circ}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Questão – 4.12

Solução:

$$\frac{4290^{\circ}}{360^{\circ}} \approx 11{,}91$$

Esse ângulo dá 11 voltas completas no ciclo trigonométrico.

Portanto, a primeira determinação positiva do arco é:

$$4290^{\circ} - 11 \cdot \left(360^{\circ}\right) = 330^{\circ}$$

Logo, $\operatorname{sen}\left(4290^{\circ}\right) = \operatorname{sen}\left(330^{\circ}\right) = -\frac{1}{2}$.

Questão – 4.13

Solução:

$$\frac{793^{\circ}}{360^{\circ}} \approx 2{,}2$$

Esse ângulo dá 2 voltas completas no ciclo trigonométrico.

Portanto, a primeira determinação positiva do arco é:

$$793^{\circ} - 3\left(360^{\circ}\right) = 73^{\circ}$$

Logo $\operatorname{sen}\left(793^{\circ}\right) = \operatorname{sen}\left(73^{\circ}\right) = 0{,}9563$.

Questão – 4.14

Solução:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{1-m^2}}{2}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \frac{1-m^2}{4} + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = 1 - \left(\frac{1-m^2}{4}\right) \Rightarrow \cos^2 x = \left(\frac{3+m^2}{4}\right) \Rightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{3+m^2}}{2}$$

Questão – 4.15

Solução: :

$$\begin{cases} \sqrt{2}.\operatorname{sen} x + \cos x = \sqrt{2} & \text{(I)} \\ \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 & \text{(II)} \end{cases}$$

Devemos resolver este sistema

$$\sqrt{2} \cdot \operatorname{sen} x + \cos x = \sqrt{2} \Rightarrow \cos x = \sqrt{2} \cdot (1 - \operatorname{sen} x)$$

Substituindo em (II), temos que:

$$\operatorname{sen}^2 x + \left(\sqrt{2} \cdot (1 - \operatorname{sen} x)\right)^2 = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x + \left(2 \cdot \left(1 - 2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x\right)\right) = 1$$

$$3\operatorname{sen}^2 x - 4\operatorname{sen} x + 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{4 \pm 2}{6}$$

Agora temos 2 casos a analisar:

Caso 1: $\operatorname{sen} x = 1$

Temos que: $\cos x = 0$.

Caso 2: $\text{sen}x = \frac{1}{3}$

Temos que: $\cos x = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Se $\cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \sqrt{2}\cdot \text{sen}x + \cos x = \sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{-2\sqrt{2}}{3} = \frac{-\sqrt{2}}{3}$

E claramente não é solução do sistema.

Se $\cos x = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \sqrt{2}.\text{sen}x + \cos x = \sqrt{2}$

Logo, as soluções são: $\text{sen}x = 1$ e $\cos x = 0$ ou $\text{sen}x = \frac{1}{3}$ e $\cos x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

Questão – 4.16

a) $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Questão – 4.17 – Resolvida atrás do livro-texto

Questão – 4.18 – Resolvida atrás do livro-texto

Questão – 4.19 – Resolvida atrás do livro-texto

Questão – 4.20 – Resolvida atrás do livro-texto

Questão – 4.21 – Resolvida atrás do livro-texto

Questão – 4.22

Solução:

Na página 68 do livro-texto já foi dito que $\operatorname{sen}\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

Como $\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$, temos que:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{16} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{8}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$$

Questão – 4.23

Solução 1:

Na página 68 do livro – texto já foi dito que $\operatorname{sen}\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

Logo:

$$\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)^2 + \cos^2\frac{\pi}{8} = 1 \Rightarrow \cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

Solução 1:

Vamos provar algo mais geral

$$\cos\frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}{2}$$

(onde há n radicais) para n natural positivo.

Prova:

Vamos provar isso por indução

I) Note que $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

II) Suponhamos que a propriedade é valida para n = k

$$\cos\frac{\pi}{2^{k+1}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}{2}$$

(onde há k radicais).

III) Vamos mostrar que a propriedade vale para n = k + 1

$$\text{Como } \cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

Usando essa formula, temos que:

$$\cos\frac{\pi}{2^{k+2}} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}}{2}} \Rightarrow \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}{2}}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}{4}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}}{2}$$

(onde há k + 1 radicais).

Logo, a propriedade é válida.

Capítulo 5

Tangente e Cotangente

Capítulo 5
Tangente e cotangente

Questão – 5.14

Solução:

a) $\frac{932^{\circ}}{360^{\circ}} = 2,58$

Logo, esse ângulo dá 2 voltas completas no ciclo trigonométrico.

Portanto, a primeira determinação positiva do arco é:

$$932^{\circ} - 2(360^{\circ}) = 212^{\circ}$$

Logo, o arco está no terceiro quadrante e, portanto, a tangente é positiva.

b) $\frac{-1267^{\circ}}{360} \approx -3,51$

Esse ângulo dá 3 voltas completas (no sentido negativo) no ciclo trigonométrico.

Portanto, a primeira determinação positiva do arco é:

$$-1267^{\circ} + 4(360^{\circ}) = 173^{\circ}$$

O arco está no segundo quadrante, portanto a cotangente é negativa.

c) Essa questão segue o mesmo raciocínio da letra a

d) Essa questão segue o mesmo raciocínio da letra a

e) Essa questão segue o mesmo raciocínio da letra a

f) Essa questão segue o mesmo raciocínio da letra a

Questão – 5.15

Solução:

Primeira Parte: calcular cos x

$$\text{sen}^2x+\cos^2x=1 \;\Rightarrow\; \cos^2x=1-\frac{9}{100} \;\Rightarrow\; \cos x=\pm\frac{\sqrt{91}}{10}$$

Segunda Parte: calcular tg x

$$\text{tg}x=\frac{\text{sen}x}{\cos x}=\pm\frac{\frac{3}{10}}{\frac{\sqrt{91}}{10}}=\pm\frac{3}{\sqrt{91}}\cdot\frac{\sqrt{91}}{\sqrt{91}}=\pm\frac{3\sqrt{91}}{91}$$

Terceira Parte: calcular cotg x

$$\cot gx=\frac{1}{\text{tg}x}=\pm\frac{1}{\frac{3}{\sqrt{91}}}=\pm\frac{\sqrt{91}}{3}$$

Note que:

$$\cos x=\frac{\sqrt{91}}{10} \;\Rightarrow\; \text{tg}x=\frac{\text{sen}x}{\cos x}=\frac{3\sqrt{91}}{10} \;\Rightarrow\; \cot gx=\frac{\sqrt{91}}{3}$$

$$\cos x=-\frac{\sqrt{91}}{10} \;\Rightarrow\; \text{tg}x=\frac{\text{sen}x}{\cos x}=-\frac{3\sqrt{91}}{10} \;\Rightarrow\; \cot gx=-\frac{\sqrt{91}}{3}$$

Questão – 5.16

Solução:

Primeira Parte: calcular sen x

$$\text{sen}^2x+\cos^2x=1 \;\Rightarrow\; \text{sen}^2x=1-\frac{16}{25} \;\Rightarrow\; \text{sen}x=\pm\frac{3}{5}$$

Segunda Parte: calcular tg x

$$\text{tg}x=\frac{\text{sen}x}{\cos x}=\pm\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=\pm\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{4}=\pm\frac{3}{4}$$

Terceira Parte: calcular cotg x

$$\cot gx = \frac{1}{tgx} = \pm\frac{1}{\frac{3}{4}} = \pm\frac{4}{3}$$

Note que:

$$senx = \frac{3}{5} \Rightarrow tgx = \frac{senx}{\cos x} = -\frac{3}{4} \Rightarrow \cot gx = -\frac{4}{3}$$

$$senx = -\frac{3}{5} \Rightarrow tgx = \frac{senx}{\cos x} = \frac{3}{4} \Rightarrow \cot gx = \frac{4}{3}$$

Questão – 5.17

Solução:

Primeira Parte: calcular cotg x

$$tgx = -\frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \cot gx = -\frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Segunda Parte: calcular senx e cosx

$$tgx = \frac{senx}{\cos x} = -\frac{\sqrt{5}}{2} = senx = -\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\cos x \Rightarrow sen^2x = \frac{5}{4}\cdot\cos^2 x$$

$$\cos^2 x + \frac{5}{4}\cdot\cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = \pm\frac{2}{3} \Rightarrow senx = -\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\pm\frac{2}{3} = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$$

Note que:

$$\cos x = \frac{2}{3} \Rightarrow senx = -\frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \cot gx = \frac{\cos x}{senx} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos x = -\frac{2}{3} \Rightarrow senx = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \cot gx = \frac{\cos x}{senx} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Questão – 5.18

Solução:

Primeira Parte: calcular tg x

$$\cot gx = 2 \Rightarrow tgx = \frac{1}{2}$$

Segunda Parte: calcular sen x e cos x

$$tgx = \frac{senx}{\cos x} = 2 \Rightarrow senx = 2\cos x \Rightarrow sen^2x = 4\cos^2 x$$

$$\cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \cos^2 x + 4\cos^2 x = 1 \Rightarrow senx = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Note que:

$$\cos x = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow senx = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow tgx = \frac{senx}{\cos x} = \frac{1}{2}$$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow senx = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow tgx = \frac{senx}{\cos x} = \frac{1}{2}$$

Questão – 5.19

Solução:

Primeira Parte: Calcular sen x

$$sen^2x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)^2 \Rightarrow senx = \pm\frac{2t}{t^2+1}$$

Segunda Parte: calcular tg x

$$tgx = \frac{senx}{\cos x} = \pm\frac{\frac{2t}{t^2+1}}{\frac{t^2-1}{t^2+1}} = \pm\frac{2t}{t^2-1}$$

Terceira Parte: calcular cotgx

$$\cot gx = \frac{1}{tgx} = \pm\frac{1}{\frac{2t}{t^2-1}} = \pm\frac{2t}{t^2-1}$$

Questão –5.20

Solução:

a) $t = \frac{1}{2} \Rightarrow senx = -\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} = -\frac{3}{5}$

Temos que: sen x < 0, logo x deve está no terceiro ou no quarto quadrante.

b) Essa questão segue o mesmo raciocínio da letra a

c) Essa questão segue o mesmo raciocínio da letra a

Questão – 5.21

Solução:

$$\cot gx = \frac{\cos x}{senx} = m \quad \Rightarrow \quad \cos x = m \cdot senx \quad \Rightarrow \quad \cos^2 x = m^2 \cdot sen^2 x$$

$$sen^2 x + m^2 \cdot sen^2 x = 1 \quad \Rightarrow \quad senx = \pm\frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \quad \Rightarrow \quad \cos x = \pm\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$$

Questão – 5.22

Solução:

$$tgx = \frac{senx}{\cos x} = \frac{2\sqrt{p}}{1-p} \quad \Rightarrow \quad senx = \frac{2\sqrt{p}}{1-p} \cdot \cos x \quad \Rightarrow \quad sen^2 x = \frac{4p}{(1-p)^2} \cdot \cos^2 x$$

$$\cos^2 x + \frac{4p}{(1-p)^2} \cdot \cos^2 x = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{(1+p)^2}{(1-p)^2} \cdot \cos^2 x = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos x = \pm\frac{(1-p)}{(1+p)}$$

Questão – 5.23

Solução:

$$3\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2 \Rightarrow 3\cos^2 x - \left(1 - \cos^2 x\right) = 2 \Rightarrow 4\cos^2 x = 3$$

$$\cos^2 x = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \pm\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\pm\frac{1}{2}}{\pm\frac{\sqrt{3}}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \operatorname{cotg} x = \frac{1}{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}} = \pm\sqrt{3}$$

Questão – 5.24

Solução:

$$(a-1)\cdot \operatorname{sen}^2 x + (a+1)\cdot \cos^2 x = a$$

$$(a-1)\cdot \operatorname{sen}^2 x + (a-1)\cdot \cos^2 x + 2\cos^2 x = a$$

$$(a-1)\left(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x\right) + 2\cdot \cos^2 x = a \Rightarrow 2\cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{sen} x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \pm 1 \Rightarrow \operatorname{cotg} x = \pm 1$$

Questão – 5.25

Solução:

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \Rightarrow \frac{2m-1}{3m} = \frac{1}{\frac{2m-3}{m}} \Rightarrow \frac{2m-1}{3m} = \frac{m}{2m-3}$$

$$(2m-1)\cdot(2m-3) = 3m^2 \Rightarrow m^2 - 8m + 3 = 0 \Rightarrow m = \frac{8 \pm 2\cdot\sqrt{13}}{2} \Rightarrow m = 4 \pm \sqrt{13}$$

Questão – 5.26

a) Note que $-\frac{5\pi}{4}$ é solução, daí as demais são:

$$-\frac{5\pi}{4}+\pi=-\frac{\pi}{4},\ -\frac{5\pi}{4}+2\pi=\frac{3\pi}{4},\ -\frac{5\pi}{4}+3\pi=\frac{7\pi}{4}.$$

Assim, as soluções são: $-\frac{5\pi}{4},\ -\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4},\ \frac{7\pi}{4}$

b) Note que, $-\frac{5\pi}{3}$ é solução, daí as demais são:

$$-\frac{5\pi}{3}+\pi=-\frac{2\pi}{3},\ -\frac{5\pi}{3}+2\pi=\frac{\pi}{3},\ -\frac{5\pi}{3}+3\pi=\frac{4\pi}{3}.$$

Assim, as soluções são: $-\frac{5\pi}{3},-\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}$.

c) Análogo a letra a

d) Análogo a letra a

e) Análogo a letra a

Questão – 5.27 Itens a, b, c, d e e, são análogos ao item a da questão 5.26

Questão – 5.28 Itens a, b, c, d, e, f e g, são análogos ao item a da questão 5.26

Solução:

h) $\operatorname{tg}x+\operatorname{cotg}x+2=0 \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}+2=0 \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}^2x+\cos^2x}{\operatorname{sen}x\cdot\cos x}=-2$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}x\cdot\cos x}=-2 \Rightarrow 1=-2\cdot\operatorname{sen}x\cdot\cos x \Rightarrow \operatorname{sen}2x=-1 \Rightarrow \operatorname{sen}x=\frac{3\pi}{4}+k\pi$$

Questão – 5.29

Solução:

$$\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{2\sqrt{10}}{5} \Rightarrow \cos A=\frac{2\sqrt{10}}{5}\cdot\cos B \Rightarrow \cos^2A=\frac{8}{5}\cdot\cos^2B$$

$$\cos^2B=\frac{5}{8}\cdot\cos^2A \Rightarrow \cos^2B+\operatorname{sen}^2B=\frac{5}{8}\cdot\cos^2A+4\cdot\operatorname{sen}^2A=1$$

$$\frac{5}{8}\cdot\cos^2 A + 4\cdot\left(1-\cos^2 A\right) = 1 \;\Rightarrow\; \left(\cos^2 A\right)\cdot\left(\frac{5}{8}-4\right) = -3$$

$$\left(\cos^2 A\right)\cdot\left(\frac{-27}{8}\right) = -3 \;\Rightarrow\; \cos^2 A = \frac{24}{27} = \frac{8}{9} \;\Rightarrow\; \cos A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\cos^2 B = \frac{5}{8}\cdot\frac{8}{9} \;\Rightarrow\; \cos B = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Note também que:

$$\text{sen}^2 A + \cos^2 A = 1 \;\Rightarrow\; \text{sen}^2 A = 1 - \frac{8}{9} \;\Rightarrow\; \text{sen}A = \frac{1}{3}$$

$$\text{sen}^2 B + \cos^2 B = 1 \;\Rightarrow\; \text{sen}^2 B = 1 - \frac{5}{9} \;\Rightarrow\; \text{sen}B = \frac{2}{3}$$

Temos que:

$$\text{tg}B = \frac{\text{sen}B}{\cos B} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{tg}A = \frac{\text{sen}A}{\cos A} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Questão – 5.30

a) $\cot g^2\alpha\cdot\text{tg}\alpha\cdot\text{sen}\alpha + \text{tg}^2\alpha\cdot\text{cotg}\alpha\cdot\cos\alpha =$

$$= \frac{\cos^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha}\cdot\frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}\cdot\text{sen}\alpha + \frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}\cdot\cos\alpha = \cos\alpha + \text{sen}\alpha$$

b) $\text{sen}\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\text{tg}\alpha = \text{sen}\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \text{sen}^2\alpha$

c) $\frac{\cos\alpha\cdot(1+\operatorname{sen}\alpha)}{1+\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\cos\alpha\cdot(1+\operatorname{sen}\alpha)}{1+\cos\alpha\cdot\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\cos\alpha\cdot(1+\operatorname{sen}\alpha)}{1+\operatorname{sen}\alpha}=\cos\alpha$

d) $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\cdot\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha=\frac{\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}$

e) $\left(1+\operatorname{tg}^2\alpha\right)\cdot\left(1+\operatorname{cotg}^2\alpha\right)\cdot\left(1-\cos^2\alpha\right)=\sec^2\alpha\cdot\operatorname{cossec}^2\alpha\cdot\operatorname{sen}^2\alpha=$

$=\frac{1}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}\cdot\operatorname{sen}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$

f) $\frac{1+\operatorname{cotg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1+\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}}{1+\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\frac{\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}}{\frac{\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}=\operatorname{cotg}\alpha$

g) $2\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha\cdot(\operatorname{cotg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha)=2\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha\cdot\left(\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}-\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\right)=$

$=2\cos\alpha-\left(\frac{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos\alpha}\right)=\frac{\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}$

h) $\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\sec^2\alpha}=\frac{\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{1}{\cos^2\alpha}}=\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{\cos^2\alpha}{1}=\operatorname{sen}^2\alpha$

i) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\left(1+\operatorname{tg}^2\alpha\right)^2}+\frac{\operatorname{cotg}\alpha}{\left(1+\operatorname{cotg}^2\alpha\right)^2}=\frac{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}{\sec^4\alpha}+\frac{\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}}{\operatorname{cossec}^4\alpha}=$

$=\frac{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{1}{\cos^4\alpha}}+\frac{\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}}{\frac{1}{\operatorname{sen}^4\alpha}}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos^4\alpha}{1}+\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\cdot\frac{\operatorname{sen}^4\alpha}{1}=$

$=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos^3\alpha+\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos^3\alpha=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha\cdot(\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha)=$

$=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha$

Questão – 5.31– Resolvida atrás do livro-texto

Capítulo 6

Secante e Cossecante

Capítulo 6
Secante e Cossecante

Questão – 6.5

Solução:

$$\text{sen}^2x+\cos^2 x=1 \Rightarrow \cos^2 x=1-\frac{9}{25} \Rightarrow \cos x=\pm\frac{4}{5}$$

Agora vamos analisar os 2 casos.

Caso 1:

$$\cos x=\frac{4}{5} \Rightarrow tgx=\frac{\text{sen}x}{\cos x}=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{3}{4} \Rightarrow \cot gx=\frac{1}{tgx}=\frac{1}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}\cos x=\frac{4}{5}$$

$$\sec x=\frac{5}{4}$$

$$\text{sen}x=-\frac{3}{5} \Rightarrow \text{cossec}\,x=-\frac{5}{3}$$

Caso 2:

$$\cos x=-\frac{4}{5} \Rightarrow tgx=\frac{\text{sen}x}{\cos x}=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{3}{4} \Rightarrow \cot gx=\frac{1}{tgx}=\frac{1}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}$$

$$\cos x=-\frac{4}{5} \Rightarrow \sec x=-\frac{5}{4}$$

$$\text{sen}x=-\frac{3}{5} \Rightarrow \text{cossec}\,x=-\frac{5}{3}$$

Questão – 6.6

Solução:

$$tgx=\frac{\text{sen}x}{\cos x}=\frac{\sqrt{7}}{3} \Rightarrow \text{sen}x=\frac{\sqrt{7}}{3}\cos x \Rightarrow \text{sen}^2x=\frac{7}{9}\cos^2 x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2 x+\frac{7}{9}\cos^2 x=1 \Rightarrow \frac{16}{9}.\cos^2 x=1 \Rightarrow \cos x=\pm\frac{3}{4}$$

Agora vamos analisar os 2 casos

Caso 1:

$$\cos x = \frac{3}{4} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{7}}{3} \cdot \frac{3}{4} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{7}}{4} \; tgx = \frac{\sqrt{7}}{3} \Rightarrow \cot gx = \frac{3\sqrt{7}}{7}$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{7}}{4} \Rightarrow \operatorname{cossec} x = \frac{4\sqrt{7}}{7}$$

$$\cos x = \frac{3}{4} \Rightarrow \sec x = \frac{4}{3}$$

Caso 2:

$$\cos x = -\frac{3}{4} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{7}}{3} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \Rightarrow \operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{7}}{4} \; tgx = \frac{\sqrt{7}}{3} \Rightarrow \cot gx = \frac{3\sqrt{7}}{7}$$

$$\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{7}}{4} \Rightarrow \operatorname{cossec} x = -\frac{4\sqrt{7}}{7}$$

$$\cos x = -\frac{3}{4} \Rightarrow \sec x = -\frac{4}{3}$$

Questão –6.7

Solução:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = -\frac{5}{2} \Rightarrow \cos x = -\frac{2}{5} \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = 1 - \frac{4}{25} \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{21}{25} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \pm\frac{\sqrt{21}}{25}$$

Agora vamos analisar os 2 casos

Caso 1:

$$\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{21}}{5} \Rightarrow \operatorname{cossec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \frac{5\sqrt{21}}{21} \; tgx = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\frac{\sqrt{21}}{5}}{-\frac{2}{5}} = -\frac{\sqrt{21}}{2}$$

$$\cot gx = \frac{1}{tgx} = -\frac{2\sqrt{21}}{21}$$

Caso 2:

$$senx = -\frac{\sqrt{21}}{5} \Rightarrow \cos\sec x = \frac{1}{senx} = -\frac{5\sqrt{21}}{21} \quad tgx = \frac{senx}{\cos x} = \frac{-\frac{\sqrt{21}}{5}}{-\frac{2}{5}} = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

$$\cot gx = \frac{1}{tgx} = \frac{2\sqrt{21}}{21}$$

Questão – 6.8 – Essa questão segue o mesmo raciocínio da questão 6.7

Questão – 6.9

Solução:

$$\cos\sec x = m \Rightarrow -1 + \cos\sec^2 x = -1 + m^2 \Rightarrow \cot g^2 x = -1 + m^2$$

$$\cot gx = \pm\sqrt{-1+m^2} \Rightarrow tgx = \pm\frac{1}{\sqrt{-1+m^2}} = \pm\frac{\sqrt{-1+m^2}}{-1+m^2}$$

Questão – 6.10

Solução:

$$\sec x = 2p^2 - 1 \Rightarrow \frac{1}{\cos x} = 2p^2 - 1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2p^2-1} \Rightarrow -1 \le \frac{1}{2p^2-1} \le 1$$

Vamos dividir em 2 partes:

Primeira Parte: $-1 \le \frac{1}{2p^2-1}$

$$-1 \le \frac{1}{2p^2-1} \Rightarrow 2p^2 - 1 \le -1 \Rightarrow 2p^2 \le 0 \Rightarrow p = 0$$

Segunda Parte: : $\frac{1}{2p^2-1} \le 1$

$$\frac{1}{2p^2-1} \leq 1 \Rightarrow 2p^2-1 \geq 1 \Rightarrow 2p^2 \geq 2 \Rightarrow p^2 \geq 1$$

Temos que: $p \leq -1$ **ou** $p = 0$ **ou** $p \geq 1$

Questão – 6.11

Solução:

$$1+tg^2x = \sec^2 x \Rightarrow 1+(3m+3)^2 = (m+2)^2 \Rightarrow 4m^2+7m-3=0 \Rightarrow m = \frac{-7 \pm 1}{8}$$

Concluímos que $m = -1$ ou $m = -\frac{3}{4}$

Questão – 6.12 – Essa questão segue o mesmo raciocínio da questão 6.9

Questão – 6.13

Solução:

a) $$\frac{1+\operatorname{sen}\alpha}{\sec\alpha+tg\alpha} = \frac{1+\operatorname{sen}\alpha}{\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}} = (1+\operatorname{sen}\alpha)\cdot\frac{\cos\alpha}{1+\operatorname{sen}\alpha} = \cos\alpha$$

b) $$\left(\sec^4\alpha - \sec^2\alpha\right)\cdot\cos^4\alpha = \left(\frac{1}{\cos^4\alpha} - \frac{1}{\cos^2\alpha}\right)\cdot\cos^4\alpha =$$

$$= \left(\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^4\alpha}\right)\cdot\cos^4\alpha = 1-\cos^2\alpha = \operatorname{sen}^2\alpha$$

c) $$\frac{\operatorname{cossec}\alpha - \cot g\alpha}{\operatorname{cossec}\alpha + \cot g\alpha} + \frac{\operatorname{cossec}\alpha + \cot g\alpha}{\operatorname{cossec}\alpha - \cot g\alpha} = \frac{\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}}{\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}} + \frac{\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}}{\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}} =$$

$$= \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{(1-\cos\alpha)^2+(1+\cos\alpha)^2}{(1+\cos\alpha)\cdot(1-\cos\alpha)} =$$

$$= \frac{2 \div 2\cos^2\alpha}{\left(1-\cos^2\alpha\right)} = \frac{2+2\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{2}{\operatorname{sen}^2\alpha} + \frac{2\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} =$$

$$= 2\operatorname{cossec}^2\alpha + 2\operatorname{cotg}^2\alpha = 2\cdot\left(1 \div \operatorname{cotg}^2\alpha\right) \div 2\operatorname{cotg}^2\alpha = 2 + 4\cdot\operatorname{cotg}^2\alpha$$

d) $(1-\cos\alpha)\cdot(\operatorname{cossec}\alpha \div \operatorname{cotg}\alpha) = (1-\cos\alpha)\cdot\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\right) =$

$$= (1-\cos\alpha)\cdot\left(\frac{1+\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\right) = \frac{1-\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \operatorname{sen}\alpha$$

Questão – 6.14 – Resolvida atrás do livro-texto

Capítulo 7

Redução ao Primeiro Quadrante

Capítulo 7
Redução ao Primeiro Quadrante

Questão – 7.3

Solução:

a) $\text{sen}15^\circ = \text{sen}\left(180^\circ - 115^\circ\right) = \text{sen}\left(65^\circ\right) = 0{,}9063$

b) $\cos 263^\circ = -\cos\left(360^\circ - 263^\circ\right) = -\cos 97^\circ = -\cos 83^\circ = -0{,}1219$

c) $\text{tg}321^\circ = -\text{tg}39^\circ = -0{,}8098$

d) $\text{cotg}\,376^\circ = \text{cotg}\left(376^\circ - 360^\circ\right) = \text{cotg}\,16^\circ = 3{,}487$

e) $\sec 506^\circ = \sec\left(506^\circ - 360^\circ\right) = \text{cotg}\,146^\circ = -\sec 34^\circ = -\dfrac{1}{\cos 34^\circ} =$

$= -\dfrac{1}{0{,}829} \approx -1{,}4394$

f) $\text{cossec}\,584^\circ = \text{cossec}\left(584^\circ - 360^\circ\right) = \text{cossec}\,224^\circ = -\text{cossec}\,44^\circ =$

$= -\dfrac{1}{\text{sen}44^\circ} = -\dfrac{1}{0{,}6947} \approx -1{,}4394$

g) $\dfrac{-4329^\circ}{360^\circ} = -12{,}025$

Esse ângulo dá 12 voltas (no sentido negativo) completas no ciclo trigonométrico.

Portanto, a primeira determinação positiva do arco é

$-4329^\circ + 13 \cdot \left(360^\circ\right) = 351^\circ$

Logo $\text{sen}\left(-4329^\circ\right) = \text{sen}\left(351^\circ\right) = \text{sen}9^\circ = -0{,}1564$

h) $\frac{5230}{360^\circ} = 14,52$

Esse ângulo dá 14 voltas completas no ciclo trigonométrico, portanto, a primeira determinação positiva do arco é:

$5230^\circ - 14 \cdot (360^\circ) = 190^\circ$

Logo $\cos(5230^\circ) = \cos(351^\circ) = -\cos 10^\circ = -0,9848$

i) $\operatorname{tg}(-208^\circ) = \operatorname{tg}(360^\circ - 208^\circ) = \operatorname{tg} 152^\circ = -\operatorname{tg} 28^\circ = -0,5317$

Questão – 7.4

Solução:

a) $\frac{\frac{323\pi}{45}}{2\pi} = \frac{323}{90} \approx 3,58$

Esse ângulo dá 3 voltas completas no ciclo trigonométrico.

A primeira determinação positiva do arco é:

$\frac{323\pi}{45} - 3 \cdot (2\pi) = \frac{53\pi}{45}$

Assim, temos que: $\operatorname{sen}\frac{323\pi}{45} = \operatorname{sen}\frac{53\pi}{45} = \operatorname{sen}\frac{53\pi}{45} = \operatorname{sen}\frac{8\pi}{45} = 0,5299$

$\cos\frac{323\pi}{45} = \cos\frac{53\pi}{45} = \cos\frac{53\pi}{45} = -\cos\frac{8\pi}{15} = -0,848$

$\operatorname{tg}\frac{323\pi}{45} = \operatorname{tg}\frac{53\pi}{45} = \operatorname{tg}\frac{53\pi}{45} = -\operatorname{tg}\frac{8\pi}{45} = -0,6249$

Temos que: $\operatorname{sen}A + \cos A + \operatorname{tg}A = -0947$

b) Essa questão segue o mesmo raciocínio da letra **a**

Obs: O gabarito do livro está trocado. O gabarito da letra a é – 0,947 e a letra b é – 0,753

Capítulo 8

Equações Simples

Capítulo 8
Equações Simples

Parte1 - Exercícios Propostos

Questão – 8.9 – Veja a resposta no final do livro- texto

Questão – 8.10– Veja a resposta no final do livro-texto

Questão – 8.11

Solução:

$$\arccos\frac{3}{5} = x \Rightarrow \cos x = \frac{3}{5} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \pm\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \pm\frac{4}{5}$$

Como $0 \leq x \leq \pi \Rightarrow \operatorname{sen} x \geq 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{4}{5}$

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

Questão – 8.12

Solução:

$$\arccos a = \alpha \Rightarrow \cos\alpha = a \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \pm\sqrt{1-a^2}$$

Como $0 \leq x \leq \pi \Rightarrow \operatorname{sen} x = \sqrt{1-a^2}$

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$$

Questão – 8.17

Solução:

a) Veja a resposta no final do livro - texto

b) $2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$2x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

c) $x = \text{arcsen}\frac{1}{5} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad x = \pi - \text{arcsen}\frac{1}{5} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

d) $2x + 4 = \text{arcsen}\frac{1}{3} + 2k\pi \Rightarrow 2x = -4 + \text{arcsen}\frac{1}{3} + 2k\pi$

$x = -2 + \frac{1}{2}\text{arcsen}\frac{1}{3} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

$2x + 4 = \pi - \text{arcsen}\frac{1}{3} + 2k\pi \Rightarrow 2x = \pi - 4 - \text{arcsen}\frac{1}{3} + 2k\pi$

$x = \frac{\pi}{2} - 2 - \frac{1}{2}\text{arcsen}\frac{1}{3} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

Questão – 8.18 – Veja a resposta no final do livro-texto

Questão – 8.19

Solução:

$$\text{arcsen}\frac{12}{13} = x \Rightarrow \text{sen}x = \frac{12}{13} \Rightarrow \cos x = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \pm\frac{5}{13}$$

$$\text{Como } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos x \geq 0 \Rightarrow \cos x = \frac{5}{13}$$

$$\text{tg}x = \frac{\text{sen}x}{\cos x} = \frac{\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = \frac{12}{5}$$

Questão – 8.31 – Veja a resposta no final do livro-texto

Questão – 8.32

Solução:

a) Veja a resposta no final do livro- texto

b) Veja a resposta no final do livro-texto

c) $3x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + k\pi \Rightarrow 3x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

d) Veja a resposta no final do livro-texto

Questão – 8.33 – Veja a resposta no final do livro-texto

Questão – 8.34 –

Solução:

$$tg\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -3 \Rightarrow x - \frac{\pi}{4} = \text{arctg} - 3 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \text{arctg} - 3 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como $U = [-\pi, \pi]$ temos que:

$$x = \frac{\pi}{4} + \text{arctg} - 3 \text{ ou } x = \frac{5\pi}{4} + \text{arctg} - 3$$

Questão – 8.35

Solução:

$$x = \text{arctg}\frac{63}{16} \Rightarrow tgx = \frac{63}{16} \Rightarrow 1 + tg^2x = 1 + \left(\frac{63}{16}\right)^2 \Rightarrow \sec^2 x = \left(\frac{65}{16}\right)^2 \Rightarrow \cos x = -\frac{16}{65}$$

Como $tgx > 0$, temos que:

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{16}{65} \Rightarrow sen^2x = 1 - \left(\frac{16}{65}\right)^2 \Rightarrow sen^2x = \pm\frac{63}{65} \Rightarrow senx = \frac{63}{65}$$

Questão – 8.36

Solução:

$$x = \text{arc cotg}\frac{1-\mu^2}{2\mu} \Rightarrow \text{cotg}x = \frac{1-\mu^2}{2\mu} \Rightarrow 1+\text{cotg}^2 x = \left(\frac{1+\mu^2}{2\mu}\right)^2$$

$$\text{cossec}^2 x = \left(\frac{1+\mu^2}{2\mu}\right)^2 \Rightarrow \text{sen}x = \pm\frac{2\mu}{1+\mu^2}$$

$$\text{cotg}x > 0 \Rightarrow 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{sen}x = \frac{2\mu}{1+\mu^2} \Rightarrow$$

$$\cos^2 x = 1-\left(\frac{2\mu}{1+\mu^2}\right)^2 \Rightarrow \cos x = \pm\frac{1-\mu^2}{1+\mu^2} \Rightarrow \cos x = \frac{1-\mu^2}{1+\mu^2}$$

Questão – 8.37 – Veja a resposta no final do livro-texto

Questão – 8.38

Solução:

$$\text{arcsen}(a) = \alpha \Rightarrow \text{sen}\alpha = a, -\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$$

$$\text{arccos}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}a\right) = \beta \Rightarrow \cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{4}a,\ 0 \le \beta \le \pi$$

$$\text{Como } \alpha = \beta \Rightarrow 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \beta \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow a \ge 0$$

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha + \cos^2\beta = 1 \Rightarrow a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 = 1 \Rightarrow a = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{Como } a > 0 \text{ temos que } a = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Questão – 8.39

Solução:

$\text{arccotg}2a = \alpha \Rightarrow \text{cotg}\alpha = 2a,\ 0 \leq \alpha \leq \pi$

$\text{arccotg}3a = \beta \Rightarrow \text{cotg}\beta = 3a,\ 0 \leq \beta \leq \pi$

Como $\alpha = \beta \Rightarrow \text{cotg}\,\alpha = \text{cotg}\beta \Rightarrow 2a = 3a \Rightarrow a = 0$

Observe que esta solução não corresponde a resposta do livro-texto.

Há um erro de digitação no enunciado.

Fazendo uma pequena alteração no enunciado, consegue-se chegar ao resultado desejado.

Novo enunciado: Calcule **a**, sendo $\text{arctg}\,2a = \text{arccotg}3a$

Solução:

Seja

$\text{arctg}2a = \alpha \Rightarrow \text{tg}\alpha = 2a, -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

$\text{arccotg}3a = \beta \Rightarrow \text{cotg}\beta = 3a, 0 \leq \beta \leq \pi$

Como $\alpha = \beta \Rightarrow 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow a \geq 0$

$\text{cotg}\alpha = \frac{1}{\text{tg}\alpha} \Rightarrow 3a = \frac{1}{2a} \Rightarrow 6a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}$

Como $a \geq 0 \Rightarrow a = \frac{\sqrt{6}}{6}$

Questão – 8.40

Solução:

$\text{arctg}a = \alpha \Rightarrow \text{tg}\alpha = a, -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = a$

$\text{sen}\alpha = a\cos\alpha \Rightarrow \text{sen}^2\alpha = a^2\cos^2\alpha$

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = a^2\cos^2\alpha + \cos^2\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$$

$$\text{Como } -\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha > 0 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \Rightarrow \text{sen}\alpha = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$$

Questão – 8.41

Solução:

a) $3\text{sen}^2x + 5\text{sen}x - 2 = 0 \Rightarrow \text{sen}x = \frac{-5 \pm 7}{6}$

Assim temos que $\text{sen}\,x = -2$ ou $\text{sen}x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \text{arcsen}\frac{1}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou

$x = \pi - \text{arcsen}\frac{1}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

b) $2\cos^2 x + 5\cos x - 3 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{-5 \pm 7}{4}$

Assim temos que $\cos x = -3$ ou $\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

c) $\text{tg}^3x - 3\text{tg}x = 0 \Rightarrow \text{tg}x \cdot (\text{tg}^2x - 3) = 0$

Assim temos que:

$\text{tg}x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou

$\text{tg}^2x - 3 = 0 \Rightarrow \text{tg}x = \pm\sqrt{3} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$

d) $2\cos^2 x + 3\text{sen}x - 3 = 0 \Rightarrow 2\cdot\left(1 - \text{sen}^2x\right) + 3\text{sen}x - 3 = 0$

$-2\text{sen}^2x + 3\text{sen}x - 1 = 0 \Rightarrow \text{sen}x = \frac{-3 \pm 1}{-4}$

Assim, temos que:

$\text{sen}x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\text{sen}x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Questão – 8.42

Solução:

a) $3\sec x = 4\cos x \Rightarrow \frac{3}{\cos x} = 4\cos x \Rightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

b) $2\text{sen}x = \cos\sec x \Rightarrow 2\text{sen}x = \frac{1}{\text{sen}x} \Rightarrow \text{sen}x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\text{sen}x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ ou $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\text{sen}x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ ou $x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Fazendo a união das 4 soluções temos que:

$x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

c) $3\cot gx = tgx \Rightarrow \frac{3}{tgx} = tgx \Rightarrow tg^2x = 3 \Rightarrow tgx = \pm\sqrt{3} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

d) $\sec x + 2tgx = 2\text{sen}^2x \cdot \sec x + 2\cos x$

$\frac{1}{\cos x} + 2 \cdot \frac{\text{sen}x}{\cos x} = 2\text{sen}^2x \cdot \frac{1}{\cos x} + 2\cos x$

$1 + 2\text{sen}x = 2\text{sen}^2x + 2\cos^2 x$

$2\text{sen}x = 1 \Rightarrow \text{sen}x = \frac{1}{2}$

Assim temos que: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

e) $\operatorname{cossec}^2 x + 5 - 3\sqrt{3} \cdot \operatorname{cotx} = 0 \Rightarrow 1 + \operatorname{cotg}^2 x + 5 - 3\sqrt{3} \cdot \operatorname{cotx} = 0$

$\Rightarrow \operatorname{cotg}^2 x - 3\sqrt{3} \cdot \operatorname{cotx} + 6 = 0 \Rightarrow \operatorname{cotgx} = \frac{3\sqrt{3} \pm \sqrt{3}}{2}$

Assim temos que $x = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ ou $x = \operatorname{arccotg} 2\sqrt{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

f) $\sec^2 x + \operatorname{tg}^2 x = \frac{5}{3} \Rightarrow 1 + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 x = \frac{5}{3} \Rightarrow 2\operatorname{tg}^2 x = \frac{2}{3} \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{3}$

$\operatorname{tgx} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

g) $\operatorname{tg}^2 x \cdot (3 - 2\sec x) = 3 \cdot (\sec x - 1) \Rightarrow 3\operatorname{tg}^2 x - 6 \cdot \operatorname{tg}^2 x \cdot \sec x = 3 \cdot \sec x - 3$

$3\operatorname{tg}^2 x + 3 - 6\operatorname{tg}^2 x \cdot \sec x - 3\sec x = 0$

$3(1 + \operatorname{tg}^2 x) + 2 \cdot \left(\sec^2 x - 1\right) \cdot \sec x - 3\sec x = 0$

$3\sec^2 x + 2\sec^3 x - 2\sec x - 3\sec x = 0$

$3\sec^2 x + 2\sec^3 x - 5\sec x = 0 \Rightarrow \sec x \cdot \left(2\sec^2 x + 3\sec x - 5\right) = 0$

Agora temos 2 casos a analisar:

Caso1: $\sec x = 0$

Seja $S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid \sec x = 0\}$

$\sec x = 0 \Rightarrow S_1 = \varnothing$

Caso2: $2\sec^2 x + 3\sec x - 5 = 0$

$2\sec^2 x + 3\sec x - 5 = 0 \Rightarrow \sec x = \frac{-3 \pm 1}{-4}$

Assim, temos que: $\sec x = 1$ ou $\sec x = \frac{1}{2}$

$\sec x = 1 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\sec x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = 2$ o que é impossível pois $-1 \leq \cos x \leq 1$

h) $\frac{\text{sen}x}{1+\cos x} = 2 - \text{cotg}x \Rightarrow \frac{\text{sen}x}{1+\cos x} = \frac{2\text{sen}x - \cos x}{\text{sen}x}$

$(1+\cos x)\cdot(2\text{sen}x - \cos x) = \text{sen}^2 x$

$2\text{sen}x - \cos x + 2\text{sen}x \cdot \cos x - \cos^2 x = \text{sen}^2 x$

$2\text{sen}x - \cos x + 2\text{sen}x \cdot \cos x = 1 \Rightarrow 2\text{sen}x \cdot (1+\cos x) - 1 \cdot (1+\cos x) = 0$

$(2\text{sen}x - 1)\cdot(1+\cos x) = 0 \Rightarrow 2\text{sen}x - 1 = 0$

$\text{sen}x = \frac{1}{2}$

Assim temos que $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

i) $\text{tg}x + \text{cotg}x = \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\text{sen}x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\text{sen}x} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

$\frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\text{sen}x \cdot \cos x} = \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{1}{\text{sen}x \cdot \cos x} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

$4\,\text{sen}x \cdot \cos x = \sqrt{3} \Rightarrow \text{sen}2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Assim, temos que:

$2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

ou

$2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Parte 2 – Exercícios Suplementares

Questão – II.1 – Use o mesmo raciocínio da questão – 5.14

Questão – II.2

Solução:

$$8\text{sen}^2x + 2\cos^2 x = 5\text{sen}x + 1 \Rightarrow 2\cdot\left(\text{sen}^2x + \cos^2 x\right) + 6\text{sen}^2x = 5\text{sen}x + 1$$

$$6\text{sen}^2x - 5\text{sen}x + 1 = 0 \Rightarrow \text{sen}x = \frac{5 \pm 1}{12}$$

Assim, temos que: $\text{sen}x = \frac{1}{2}$ ou $\text{sen}x = \frac{1}{3}$

Se $\text{sen}x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

Se $\text{sen}x = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Questão – II.3

Solução:

$$\text{sen}x \cdot \cos x = \frac{2\sqrt{5}}{9} \Rightarrow \text{sen}x = \frac{2\sqrt{5}}{9\cos x} \Rightarrow \text{sen}^2x = \frac{20}{81\cos^2 x}$$

$$\cos^2 x + \frac{20}{81\cos^2 x} = 1 \Rightarrow 81\cos^4 x - 81\cos^2 x + 20 = 0 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{81 \pm 9}{162}$$

Assim, temos que: $\cos^2 x = \frac{4}{9}$ ou $\cos^2 x = \frac{5}{9}$

Se $\cos x = \frac{2}{3} \Rightarrow \text{sen}x = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$\cos x = -\frac{2}{3} \Rightarrow \text{sen}x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

Se $\text{sen}x = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \cos x = \frac{2}{3}$

$\text{sen}x = -\frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \cos x = -\frac{2}{3}$

Questão – II.4

Solução:

$$2\cdot\left(\text{sen}^3x+\cos^3x\right)=\text{sen}x+\cos x$$

$$2(\text{sen}x+\cos x)\cdot\left(\text{sen}^2x-\text{sen}x\cdot\cos x+\cos^2 x\right)=\text{sen}x+\cos x\Rightarrow$$

$$(\text{sen}x+\cos x)\cdot(1-2\cdot\text{sen}x\cdot\cos x)=0$$

Agora temos 2 casos a analisar.

Caso 1: sen x + cos x = 0

$$\text{sen}x+\cos x=0\Rightarrow\text{sen}x=-\cos x\Rightarrow 2\cos^2x=1\Rightarrow\cos x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\text{sen}x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\text{sen}x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Caso 2: 1 – 2senx.cosx = 0

$$1-2\text{sen}x\cdot\cos x=0\Rightarrow\text{sen}2x=1\Rightarrow x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi\Rightarrow\text{sen}x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Portanto, as únicas soluções são:

$$\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\text{sen}x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\text{sen}x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\text{sen}x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\text{sen}x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Questão – II.5

Solução:

$$\text{sen}x + a\cos x = a \Rightarrow \cos x = \frac{a - \text{sen}x}{a} \Rightarrow \text{sen}^2 x + \left(\frac{a - \text{sen}x}{a}\right)^2 = 1$$

$$\frac{a^2 \cdot \text{sen}^2 x + a^2 - 2a \cdot \text{sen}x + \text{sen}^2 x}{a^2} = \frac{a^2}{a^2}$$

$$\left(a^2 + 1\right)\text{sen}^2 x - 2a\text{sen}x = 0 \Rightarrow \text{sen}x.\left[\left(a^2 + 1\right)\text{sen}x - 2a\right] = 0$$

Agora temos 2 casos a analisar

Caso 1: $\text{sen}\, x = 0$

$$\text{sen}x = 0 \Rightarrow a\cos x = a \Rightarrow \cos x = 1$$

Caso 2: $\left(a^2 + 1\right)\text{sen}x - 2a = 0$

$$\left(a^2 + 1\right)\text{sen}x - 2a = 0 \Rightarrow \text{sen}x = \frac{2a}{a^2 + 1} \Rightarrow \cos x = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}$$

Questão – II.6

Solução:

$$(m+1)\text{sen}x + (m-1)\cos x = m + 1 \Rightarrow \left((m+1)\text{sen}x + (m-1)\cos x\right)^2 = (m+1)^2$$

$$\left(m^2 + 2m + 1\right)\text{sen}^2 x + 2(m+1)\cdot(m-1)\cdot\text{sen}x\cdot\cos x + \left(m^2 - 2m + 1\right)\cos^2 x = m^2 + 2m + 1$$

$$\left(m^2 - 2m + 1\right)\cdot\left(\text{sen}^2 x + \cos^2 x\right) + 2\left(m^2 - 1\right)\cdot\text{sen}x\cdot\cos x + (4m)\text{sen}^2 x = m^2 + 2m + 1$$

$$\left(m^2 - 2m + 1\right)\cdot\left(\text{sen}^2 x + \cos^2 x\right) + 2\left(m^2 - 1\right)\text{sen}x\cdot\cos x + (4m)\left(1 - \cos^2 x\right) = m^2 + 2m + 1$$

$$-4m\cdot\cos^2 x + 2\cdot\left(m^2-1\right)\cdot \operatorname{sen}x\cdot\cos x = 0$$

$$\cos x\cdot\left(-4m\cos x + 2\left(m^2-1\right)\cdot \operatorname{sen}x\right) = 0$$

Assim, temos que: $\cos x = 0$ ou $-4m\cos x + 2\left(m^2-1\right)\cdot \operatorname{sen}x = 0$

Se $\cos x = 0 \Rightarrow (m+1)\operatorname{sen}x = m+1 \Rightarrow \operatorname{sen}x = 1$

No outro caso, temos que:

$$-4m\cos x + 2\left(m^2-1\right)\cdot \operatorname{sen}x = 0 \Rightarrow 2\left(m^2-1\right)\cdot \operatorname{sen}x = 4m\cos x \Rightarrow$$

$$\operatorname{sen}x = \frac{2m}{m^2-1}\cdot\cos x \Rightarrow (\operatorname{sen}x)^2 = \left(\frac{2m}{m^2-1}\cdot\cos x\right)^2 \Rightarrow$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{4m^2}{m^4-2m^2+1}\cos^2 x \Rightarrow \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x + \frac{4m^2}{m^4-2m^2+1}\cos^2 x$$

$$1 = \left(\frac{m^2+1}{m^2-1}\right)^2\cdot\cos^2 x \Rightarrow \cos x = \pm\frac{m^2-1}{m^2+1}$$

Agora temos dois casos a analisar:

$$\cos x = -\frac{m^2-1}{m^2+1} \Rightarrow \operatorname{sen}x = -\frac{2m}{m^2+1} \Rightarrow (m+1)\cdot\operatorname{sen}x + (m-1)\cos x = -(m-1)$$

ou

$$\cos x = \frac{m^2-1}{m^2+1} \Rightarrow \operatorname{sen}x = \frac{2m}{m^2+1} \Rightarrow (m+1)\cdot\operatorname{sen}x + (m-1)\cos x = (m+1)$$

Portanto, as únicas soluções são:

$$\operatorname{sen}x = 1 \quad \text{e} \quad \cos x = 0 \quad \text{ou} \quad \operatorname{sen}x = \frac{2m}{m^2+1} \quad \text{e} \quad \cos x = \frac{m^2-1}{m^2+1}$$

Questão – II.7 – Veja a resposta no final do livro-texto

Questão – II.8 – Veja a resposta no final do livro-texto

Questão – II.9

Solução:

$$\cos\alpha + \cos\beta = a \Rightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + 2\cos\alpha \cdot \cos\beta = a^2$$

$$\text{sen}\alpha + \text{sen}\beta = b \Rightarrow \text{sen}^2\alpha + \text{sen}^2\beta + 2\text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta = b^2$$

$$\left(\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha\right) + \left(\text{sen}^2\beta + \cos^2\beta\right) + 2\left(\cos\alpha \cdot \cos\beta + \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta\right) = a^2 + b^2$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta + \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta = \frac{a^2 + b^2 - 2}{2}$$

Questão – II.10 – Veja a resposta no final do livro-texto

Questão – II.11 – Veja a resposta no final do livro-texto

Questão – II.12 – Veja a resposta no final do livro-texto

Questão – II.13

Solução:

$$\cot g^2 x \cdot (\text{tg}x - \text{sen}x) \cdot (1 + \sec x) = \frac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x} \cdot \left(\frac{\text{sen}x}{\cos x} - \frac{\text{sen}x.\cos x}{\cos x}\right) \cdot \left(\frac{\cos x}{\cos x} + \frac{1}{\cos x}\right) =$$

$$= \frac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x} \cdot \left\{\left(\frac{\text{sen}x}{\cos x}\right) \cdot (1 - \cos x)\right\} \cdot \left(\frac{1 + \cos x}{\cos x}\right) = \frac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x} \cdot \left\{\left(\frac{\text{sen}x}{\cos x}\right) \cdot \left(\frac{1 - \cos^2 x}{\cos x}\right)\right\} =$$

$$= \frac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x} \cdot \left\{\left(\frac{\text{sen}x}{\cos x}\right) \cdot \left(\frac{\text{sen}^2 x}{\cos x}\right)\right\} = \text{sen}x$$

Questão – II.14

Solução:

$$y = \sqrt{\frac{1}{1+\cos\alpha} + \frac{1}{1-\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1-\cos^2\alpha} + \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos^2\alpha}} = \sqrt{\frac{2}{\text{sen}^2\alpha}} = \sqrt{2}\cdot\text{cossec}\,\alpha$$

Questão – II.15

Solução:

$$y = \frac{(\text{tg}x + \cot\text{g}x)^2}{\sec^2 x \cdot \text{cossec}^2 x} = \frac{\left(\frac{\text{sen}x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\text{sen}x}\right)^2}{\left(\frac{1}{\cos x}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{\text{sen}x}\right)^2} = \frac{\left(\frac{1}{\text{sen}x \cdot \cos x}\right)^2}{\left(\frac{1}{\text{sen}x \cdot \cos x}\right)^2} = 1$$

Questão – II.16 – Use o mesmo raciocínio do problema 5.15

Questão – II.17 – Use o mesmo raciocínio do problema 5.16

Questão – II.18 – Use o mesmo raciocínio do problema 5.17

Questão – II.19 – Use o mesmo raciocínio do problema 5.18

Questão – II.20

Solução:

$$\cot\text{g}x + \text{cossec}\,x = m \Rightarrow \frac{\cos x}{\text{sen}x} + \frac{1}{\text{sen}x} = m \Rightarrow 1 + \cos x = m\cdot\text{sen}x$$

$$\cos x = (m\cdot\text{sen}x) - 1 \Rightarrow \text{sen}^2 x + \left((m\cdot\text{sen}x) - 1\right)^2 = 1$$

$$\left(1+m^2\right)\cdot\text{sen}^2 x + (2m)\text{sen}x = 0$$

Assim, temos que, sen x = 0 ou $\text{sen}x = \frac{2m}{1+m^2}$. Claramente sen x = 0 não é possível, pois neste caso não existe a cossec x.

Caso $\text{sen}x = \frac{2m}{1+m^2}$, temos que:

$$\text{sen}x = \frac{2m}{1+m^2} \Rightarrow \cos^2 x = 1-\left(\frac{2m}{1+m^2}\right)^2 \Rightarrow \cos x = \pm\frac{m^2-1}{1+m^2}$$

Note que se $\cos x = -\frac{m^2-1}{1+m^2} \Rightarrow \cot gx + \text{cossec}\, x = \frac{1}{m}$, portanto:

$\cos x = -\frac{m^2-1}{1+m^2}$ não é solução.

E se $\cos x = \frac{m^2-1}{1+m^2} \Rightarrow \cot gx + \text{cossec}\, x = m$, portanto $\cos x = \frac{m^2-1}{1+m^2}$ é solução.

Questão – II.21

Solução:

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \left(\frac{m-3}{5}\right)^2 + \left(\frac{2m+4}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow 5m^2 + 10m = 0$$

$5m(m+2) = 0$

Assim, temos que: m = 0 ou m = – 2.

Questão – II.22

Solução:

$$1 + \cot g^2 x = \text{cossec}^2 x \Rightarrow 1 + \left(\sqrt{3}m + 1\right)^2 = \left(2m + \sqrt{2}\right)^2$$

$$m^2 + m\cdot\left(4\sqrt{2} - 2\sqrt{3}\right) = 0 \Rightarrow m\cdot\left(m + 4\sqrt{2} - 2\sqrt{3}\right) = 0$$

Assim, temos que: m = 0 ou m = $2\sqrt{3} - 4\sqrt{2}$.

Questão – II.23

Solução:

$$(\text{sen}x+\cos x)^2 = a^2 \Rightarrow \text{sen}^2x + 2\cdot\text{sen}x\cdot\cos x + \cos^2 x = a^2$$

$$\text{sen}x\cdot\cos x = \frac{a^2-1}{2}$$

$$\text{sen}^3x + \cos^3 x = (\text{sen}x+\cos x)\cdot\left(\text{sen}^2x - \text{sen}x\cdot\cos x + \cos^2 x\right) =$$

$$= a\cdot(1-2\text{sen}x\cdot\cos x) = a\cdot\left(1-2\cdot\left(\frac{a^2-1}{2}\right)\right) = \frac{3a-a^3}{2}$$

Questão – II.24

Solução:

$$(\text{sen}x+\cos x)^2 = a^2 \Rightarrow \text{sen}^2x + 2\cdot\text{sen}x\cdot\cos x + \cos^2 x = a^2$$

$$\text{sen}x\cdot\cos x = \frac{a^2-1}{2} \Rightarrow \left(\text{sen}^2x+\cos^2 x\right)^2 = 1$$

$$\text{sen}^4x + \cos^4x + 2\cdot\text{sen}^2x\cdot\cos^2x = 1 \Rightarrow \text{sen}^4x + \cos^4x = 1-2\cdot\left(\frac{a^2-1}{2}\right)^2$$

$$\left(\text{sen}^6x+\cos^6x\right) = \left(\text{sen}^2x+\cos^2x\right)\cdot\left(\text{sen}^4x+\cos^4x-\text{sen}^2x\cdot\cos^2x\right)^2 =$$

$$= 1\cdot\left(1-2\cdot\left(\frac{a^2-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{a^2-1}{2}\right)^2\right) = 1-3\cdot\left(\frac{a^2-1}{2}\right)^2 = \frac{4-3\cdot\left(a^2-1\right)^2}{4}$$

$$\text{tg}^3x + \text{cotg}^3x = \frac{\text{sen}^3x}{\cos^3x} + \frac{\cos^3x}{\text{sen}^3x} = \frac{\text{sen}^6x+\cos^6x}{\text{sen}^3x\cdot\cos^3x} =$$

$$= \frac{\frac{4-3\cdot\left(a^2-1\right)^2}{4}}{\left(\frac{a^2-1}{2}\right)^3} = 2\left(\frac{4-3\cdot\left(a^2-1\right)^2}{\left(a^2-1\right)^3}\right)$$

Questão – II.25 Veja a resposta no final do livro-texto

Questão – II.26

Solução:

$$\frac{535\pi}{12} = \frac{535 \cdot 180^{\circ}}{12} = 8025^{\circ} \Rightarrow \frac{8025^{\circ}}{360^{\circ}} = 22{,}29$$

Esse ângulo dá 2 voltas completas no ciclo trigonométrico.

Portanto, a primeira, determinação positiva do arco é:

$$8025^{\circ} - 22 \cdot \left(360^{\circ}\right) = 105^{\circ}$$

Assim, temos que:

$$\text{sen}A + \cos 2A + \text{tg}3A = \text{sen}105^{\circ} + \cos 210^{\circ} + \text{tg}315^{\circ} \approx 0{,}96 - 0{,}86 - 1 \approx -0{,}9$$

Questão – II.27

Solução:

$$-\pi \le x \le \pi \Rightarrow -2\pi \le 2x \le 2\pi \Rightarrow -\frac{5\pi}{3} \le 2x + \frac{\pi}{3} \le \frac{7\pi}{3}$$

Temos que: $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ tem 4 soluções:

$$\boxed{2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{12}} \qquad \boxed{2x + \frac{\pi}{3} = \frac{13\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{11\pi}{12}}$$

$$\boxed{2x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4}} \qquad \boxed{2x + \frac{\pi}{3} = \frac{11\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}}$$

Questão – II.28

Solução:

$$\text{tg}3x = -1 \Rightarrow 3x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$$

Questão – II.29

Solução:

$\text{arcsen}\frac{1}{5} = \alpha, -\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$

$\text{sen}\alpha = \frac{1}{5} \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{24}{25} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{2\sqrt{6}}{5}$

Como $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ temos que $\cos\alpha \ge 0$, logo $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

$\text{tg}x = \frac{\text{sen}x}{\cos x} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2\sqrt{6}}{5}} = \frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{12}$

Questão – II.30 – Use o mesmo raciocínio do problema 8.35

Questão – II.31 – Use o mesmo raciocínio do problema 8.38

Questão – II.32

Solução:

$\text{arccos}\left(\frac{2\sqrt{13}}{13}\right) = \alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13},\ 0 \le \alpha \le \pi$

Como $0 \le \alpha \le \pi$ temos que $\text{sen}\alpha \ge 0$

$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}\alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13} \Rightarrow \text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3\sqrt{13}}{13}}{\frac{2\sqrt{13}}{13}} = \frac{3}{2}$

$x + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = 1$

Questão – II.33 – Usando a fórmula da questão 8.40 temos que

Solução:

$y = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

Questão – II.34

Solução:

$\text{arccotg}(a) = \alpha \Rightarrow \text{cotg}\alpha = a,\ 0 \le \alpha \le \pi$

Como $0 \le \alpha \le \pi$, temos que: $\text{sen}\alpha \ge 0$

$$\text{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha} \Rightarrow a = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha} \Rightarrow a \cdot \text{sen}\alpha = \cos\alpha$$

$$a^2 \cdot \text{sen}^2\alpha = \cos^2\alpha \Rightarrow \text{sen}^2\alpha + a^2 \cdot \text{sen}^2\alpha = \text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha$$

$$\Rightarrow \text{sen}\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \Rightarrow \sec\alpha = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a}$$

Questão – II.35

Solução:

Seja $y = \text{tg}\, x$, temos que:

$$y + \frac{3}{y} = 4 \Rightarrow y^2 - 4y + 3 = 0$$

Assim: $y = 1$ ou $y = 3$

Se $y = 1 \Rightarrow \text{tg}x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$

Se $y = 3 \Rightarrow \text{tg}x = 3 \Rightarrow x = \text{arctg}3$ ou $x = \pi + \text{arctg}3$

Questão – II.36

Solução:

$$\text{tg}^2x = 2\sec x - 1 \Rightarrow 1 + \text{tg}^2x - 2\sec x = 0 \Rightarrow \sec^2x - 2\sec x = 0$$

$$\sec x \cdot (\sec x - 2) = 0$$

Assim, $\sec x = 0$ ou $\sec x = 2$. Como $\sec x \neq 0$, temos que:

$$\sec x = 2 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Questão – II.37

Solução:

$$8\cos^2 x + \sec x = 0 \Rightarrow 8\cos^3 x = 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Questão – II.38

Solução:

$$4.\text{sen}x.\cos x + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow 2\text{sen}x.\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{sen}2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Assim, temos que:

$$2x = \frac{4\pi}{3} \text{ ou } 2x = \frac{5\pi}{3} \text{ ou } 2x = \frac{10\pi}{3} \text{ ou } 2x = \frac{11\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6}$$

$$\text{ou } x = \frac{5\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{11\pi}{6}.$$

Questão – II.39

Solução:

$$\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\text{sen}^2 x} = 4 \Rightarrow \frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x} = 4 \Rightarrow (\text{sen}2x)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}2x = \pm 1$$

Assim, temos que:

$$2x = \frac{\pi}{2} \text{ ou } 2x = \frac{3\pi}{2} \text{ ou } 2x = \frac{5\pi}{2} \text{ ou } 2x = \frac{7\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} \text{ ou}$$

$$x = \frac{5\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{7\pi}{4}$$

Questão – II.40

Solução:

$$\frac{2}{\cos^2 x} + \frac{3}{\operatorname{cotg}^2 x} = 7 \Rightarrow 2 + 3\operatorname{sen}^2 x = 7\cos^2 x$$

$$2 + 3 \cdot \left(1 - \cos^2 x\right) = 7\cos^2 x \Rightarrow 10\cos^2 x = 5 \Rightarrow 2\cos^2 x - 1 = 0$$

$$\cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

Capítulo 9

Primeiras Fórmulas Trigonométricas

Capítulo 9
Primeiras Fórmulas Trigonométricas

Questão – 9.14

Solução:

a) $\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}\alpha = -\frac{3}{5}$

b) $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{4}{5}$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha = -\frac{4}{5}$

c) $\text{tg}(-\alpha) = \frac{\text{sen}(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$

Questão – 9.15

Solução:

Primeira Parte:

Calcular a para que se tenha $3 \cdot \text{sen}(y-x) + 2 \cdot \cos^2(y-x) = 0$

Solução:

Note que:

$\text{sen}(y-x) = \text{sen}(-(x-y)) = -\text{sen}(x-y) = -a$

$\text{sen}^2(y-x) + \cos^2(y-x) = 1 \Rightarrow \cos^2(y-x) = 1 - a^2$

Assim, temos que:

$3 \cdot \text{sen}(y-x) + 2 \cdot \cos^2(y-x) = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot (-a) + 2 \cdot \left(1 - a^2\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2a^2 - 3a + 2 = 0 \Leftrightarrow 2a^2 + 3a - 2 = 0$

Temos que: $a = \frac{1}{2}$ ou $a = -2$

Como a = sen (x – y), temos que a só pode ser $\frac{1}{2}$.

Segunda Parte:

Resolver a equação sen (x – y) = a para x – y no primeiro quadrante

Solução:

$$\operatorname{sen}(x-y) = \frac{1}{2} \Rightarrow x - y = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

Questão – 9.16

Solução:

a) $\cos(3x - x) = \cos 3x \cdot \cos x + \operatorname{sen} 3x \cdot \operatorname{sen} x = \cos 2x \Rightarrow y = \cos 2x$

b) $\cos\left(65^\circ + 25^\circ\right) = \cos 65^\circ \cdot \cos 25^\circ - \operatorname{sen} 65^\circ \cdot \operatorname{sen} 25^\circ = \cos 90^\circ = 0$

c) $\cos\left(70^\circ - 10^\circ\right) = \cos 70^\circ \cdot \cos 10^\circ + \operatorname{sen} 70^\circ \cdot \operatorname{sen} 10^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

Questão – 9.17

Solução:

$$\cos 75^\circ = \cos\left(45^\circ + 30^\circ\right) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \operatorname{sen} 45^\circ \cdot \operatorname{sen} 30^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 15^\circ = \cos\left(45^\circ - 30^\circ\right) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \operatorname{sen} 45^\circ \cdot \operatorname{sen} 30^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Questão – 9.18

Solução:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\alpha \cdot \cos\frac{\pi}{4} - \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\frac{\pi}{4} = \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{10} - 2\sqrt{2}}{6} = -\frac{\sqrt{2}}{6}\cdot\left(\sqrt{5} + 2\right)$$

Questão – 9.19

Solução:

$$\text{arcsen}\frac{3}{5} = \alpha \Rightarrow \text{sen}\alpha = \frac{3}{5}$$

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{4}{5}$$

$$\text{arcsen}\frac{1}{2} = \beta \Rightarrow \text{sen}\beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = 30^\circ \Rightarrow \cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta = \frac{4}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2} = \frac{4\sqrt{3} + 3}{10}$$

Questão – 9.20

Solução:

$$\sec\alpha = 3 \Rightarrow \frac{1}{\cos\alpha} = 3 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{3}$$

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = -2\sqrt{2}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha = \frac{1}{3}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{sen}\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{-2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Questão – 9.21

Solução:

a) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) = a$

b) Note que: $\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = a$

Questão – 9.22

Solução:

Note que: $\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + \left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = m$

$$\operatorname{sen}\left(-\left(\frac{\pi}{6} - x\right)\right) = -m \Rightarrow \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6} + x\right) = -m$$

Questão – 9.23

Solução:

Antes de resolvermos este problema, vamos provar um lema.

Lema: Se $a + b = \frac{\pi}{2}$, então tg a = cotg b

Prova:

$$\cot gb = \frac{\cos b}{\operatorname{sen} b} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right)} = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} = tga$$

Agora vamos ao nosso problema.

a) $$\frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \cos(-x)}{1 - tg(-x) \cdot \cot g\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x + \cos x \cdot \cos(x)}{1 - (-tgx) \cdot tgx} =$$

$$= \frac{1}{1 + tg^2 x} = \frac{1}{\sec^2 x} = \cos^2 x$$

b) Note que $\left(\frac{\pi}{12} - x\right) + \left(\frac{5\pi}{12} + x\right) = \frac{\pi}{2}$

Pelo lema temos que:

$$tg\left(\frac{\pi}{12} - x\right) = \cot g\left(\frac{5\pi}{12} + x\right)$$

Agora vamos ao nosso problema

$$\frac{\cos(a-b) \cdot tg\left(\frac{\pi}{12} - x\right)}{\cos(b-a) \cdot \cot g\left(\frac{5\pi}{12} + x\right)} = \frac{\cos(a-b)}{\cos(-(a-b))} = \frac{\cos(a-b)}{\cos(a-b)} = 1$$

Questão – 9.24

Solução:

Já sabemos que $tg(90^\circ - x) = \frac{1}{tgx}$ daí, temos que $tg1^\circ \cdot tg89^\circ = 1$, $tg2^\circ \cdot tg88^\circ = 1$, $tg3^\circ \cdot tg87^\circ = 1$, ..., $tg44^\circ \cdot tg46^\circ = 1$.

Assim temos que esse produto vale 1.

Questão – 9.25

Solução:

$$2\cos 26^\circ \cdot \cos 27^\circ \cdot \cos 28^\circ \cdot \cos 29^\circ \cdot \cos 30^\circ \cdot \operatorname{cossec} 61^\circ \cdot \operatorname{cossec} 62^\circ \cdot \operatorname{cossec} 63^\circ \cdot \operatorname{cossec} 64^\circ =$$

$$= 2 \cdot \cos 26^\circ \cdot \cos 27^\circ \cdot \cos 28^\circ \cdot \cos 29^\circ \cdot \cos 30^\circ \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} 61^\circ} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} 62^\circ} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} 63^\circ} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} 64^\circ} =$$

$$= 2 \cdot \cos 26^\circ \cdot \cos 27^\circ \cdot \cos 28^\circ \cdot \cos 29^\circ \cdot \cos 30^\circ \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} 29^\circ} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} 28^\circ} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} 27^\circ} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} 26^\circ} =$$

$$= 2 \cdot \cos 30^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Questão – 9.26

Solução:

a) $\operatorname{sen}(2a - a) = \operatorname{sen} 2a \cdot \cos a - \operatorname{sen} a \cdot \cos 2a = \operatorname{sen} a$

b) $\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{5} + \frac{\pi}{5}\right) = \operatorname{sen}\frac{4\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5} = \operatorname{sen}\pi = 0$

Questão – 9.27

Solução:

$$\operatorname{sen}(60^\circ + 45^\circ) = \operatorname{sen} 60^\circ \cdot \cos 45^\circ + \operatorname{sen} 45^\circ \cdot \cos 60^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Questão – 9.28

Solução:

$$\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{2} = \alpha \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\text{arctg}\frac{24}{7} = \beta \Rightarrow \text{tg}\beta = \frac{24}{7} \Rightarrow \frac{\text{sen}\beta}{\cos\beta} = \frac{24}{7} \Rightarrow \text{sen}\beta = \frac{24}{7}\cdot\cos\beta$$

$$\text{sen}^2\beta + \cos^2\beta = 1 \Rightarrow \cos\beta = \frac{7}{25} \Rightarrow \text{sen}\beta = \frac{24}{7}\cdot\frac{7}{25} = \frac{24}{25}$$

$$\text{sen}(\alpha-\beta) = \text{sen}\alpha\cdot\cos\beta - \text{sen}\beta\cdot\text{sen}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{7}{25} - \frac{24}{25}\cdot\frac{1}{2} =$$

$$= \frac{7\sqrt{3}-24}{50}$$

Questão – 9.29

Solução:

$$\text{sen}(a+b)\cdot\text{sen}(a-b) =$$

$$(\text{sen}a\cdot\cos b + \text{sen}b\cdot\text{sen}a)\cdot(\text{sen}a\cdot\cos b - \text{sen}b\cdot\cos a) =$$

$$= \left((\text{sen}a\cdot\cos b)^2 - (\text{sen}b\cdot\cos a)^2\right) = \left(\left(\text{sen}^2a.\cos^2 b\right) - \left(\text{sen}^2b.\cos^2 a\right)\right) =$$

$$= \left(\left(1-\cos^2 a\right)\cdot\left(\cos^2 b\right) - \left(1-\cos^2 b\right)\cdot\left(\cos^2 a\right)\right) =$$

$$= \cos^2 b - \cos^2 b\cdot\cos^2 a - \cos^2 a + \cos^2 b\cdot\cos^2 a = \cos^2 b - \cos^2 a$$

Questão – 9.30

Solução:

$$\text{tg}15^\circ = \text{tg}\left(45^\circ - 30^\circ\right) = \frac{\text{tg}45^\circ - \text{tg}30^\circ}{1 + \text{tg}45^\circ\cdot\text{tg}30^\circ} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}{\frac{3+\sqrt{3}}{3}} =$$

$$= \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}\cdot\frac{3-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{12-6\sqrt{3}}{6} = 2-\sqrt{3}$$

Questão – 9.31

Solução:

$$\cos x - \text{sen}x = \cos x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -2\cdot\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\cdot\text{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cdot\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

$$\text{sen}x + \cos x = \text{sen}x + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\cdot\text{sen}\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\cdot\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

Assim, temos que:

$$\frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + \cos x} = \frac{\sqrt{2}\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\sqrt{2}\cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

Questão – 9.32

Solução:

$$\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2 \Rightarrow \frac{\operatorname{tg}x - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1 + \operatorname{tg}x \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)} + \frac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1 - \operatorname{tg}x \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 2$$

$$\frac{\operatorname{tg}x - 1}{1 + \operatorname{tg}x \cdot 1} + \frac{\operatorname{tg}x + 1}{1 - \operatorname{tg}x \cdot 1} = 2 \Rightarrow \frac{(\operatorname{tg}x - 1)\cdot(1 - \operatorname{tg}x) + (1 + \operatorname{tg}x)\cdot(1 + \operatorname{tg}x)}{(1 + \operatorname{tg}x)\cdot(1 - \operatorname{tg}x)} = 2$$

$$\frac{4\operatorname{tg}x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 2 \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg}x - 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}x = -1 \pm \sqrt{2}$$

Questão – 9.33

Solução:

Já provamos na questão 9.31 que $\frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + \cos x} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

Vamos utilizar isso no nosso problema:

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{4} - \alpha \Rightarrow \operatorname{tg}\beta = \frac{\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha}$$

Agora vamos ao nosso problema:

$$(1 + \operatorname{tg}\alpha)\cdot(1 + \operatorname{tg}\beta) = \left(1 + \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\right)\cdot\left(1 + \frac{\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha}\right) =$$

$$= \left(\frac{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha}\right)\cdot\left(\frac{(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha) + (\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha)}{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha}\right) =$$

$$= \left(\frac{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha}\right)\cdot\left(\frac{2\cdot\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha}\right) = 2$$

Questão – 9.34

Solução:

$$x+y+z=\frac{\pi}{2} \Rightarrow x+y=\frac{\pi}{2}-z \Rightarrow tg(x+y)=tg\left(\frac{\pi}{2}-z\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{tgx+tgy}{1-tgx\cdot tgy}=\frac{1}{tgz} \Rightarrow tgx\cdot tgz+tgy\cdot tgz=1-tgx\cdot tgy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow tgx\cdot tgz+tgy\cdot tgz+tgx\cdot tgy=1$$

9.35

Solução:

$$\cot g\alpha+\cot g\beta=-b \quad e \quad \cot g\alpha\cdot\cot g\beta=-1$$

$$\cot g(\alpha+\beta)=\frac{1}{tg(\alpha+\beta)}=\frac{1}{\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}}=\frac{1-tg\alpha\cdot tg\beta}{tg\alpha+tg\beta}$$

$$=\frac{1-\frac{1}{\cot g\alpha}\cdot\frac{1}{\cot g\beta}}{\frac{1}{\cot g\alpha}+\frac{1}{\cot g\beta}}=\frac{\cot g\alpha\cdot\cot g\beta-1}{\cot g\alpha+\cot g\beta}=\frac{-1-1}{-b}=\frac{2}{b}$$

Questão – 9.36

Solução:

Note que:

$s=sen(a+b)+cos(a-b)$	$p=sen(a+b)\cdot cos(a-b)$
$s_1=sena+cosa$	$p_1=sena\cdot cosa$
$s_2=senb+cosb$	$p_2=senb\cdot cosb$

Temos que:

$$s=sen(a+b)+cos(a-b)=sena\cdot cosb+senb\cdot cosa+cosa\cdot cosb+sena\cdot senb$$

$$s_1\cdot s_2=(sena+cosa)\cdot(senb+cosb)=$$

$\text{sen}a \cdot \cos b + \text{sen}a \cdot \text{sen}b + \cos a \cdot \text{sen}b + \cos a \cdot \cos b = s$

Assim temos que $s = s_1 \cdot s_2$

$p = \text{sen}(a+b) \cdot \cos(a-b) = (\text{sen}a \cdot \cos b + \text{sen}b \cdot \cos a) \cdot (\cos a \cdot \cos b + \text{sen}a \cdot \text{sen}b) =$

$= \cos^2 b \cdot (\text{sen}a \cdot \cos a) - \text{sen}^2 b \cdot (\text{sen}a \cdot \cos a) - \cos^2 a \cdot (\text{sen}b \cdot \cos b) + \text{sen}^2 a \cdot (\text{sen}b \cdot \cos b) =$

$= \text{sen}a \cdot \cos a + \text{sen}b \cdot \cos b = p_1 + p_2$

Questão – 9.41

Solução:

a) $\text{sen}(\pi - x) = \text{sen}\pi \cdot \cos x - \cos\pi \cdot \text{sen}x = \text{sen}x$

b) $\cos(\pi - x) = \cos\pi \cdot \cos x + \text{sen}\pi \cdot \text{sen}x = -\cos x$

c) $\text{tg}(\pi - x) = \dfrac{\text{tg}\pi - \text{tg}x}{1 + \text{tg}\pi \cdot \text{tg}x} = -\text{tg}x$

d) $\text{sen}(\pi + x) = \text{sen}\pi \cdot \cos x + \cos\pi \cdot \text{sen}x = -\text{sen}x$

e) $\cos(\pi + x) = \cos\pi \cdot \cos x - \text{sen}\pi \cdot \text{sen}x = -\cos x$

f) $\text{tg}(\pi + x) = \dfrac{\text{tg}\pi + \text{tg}x}{1 - \text{tg}\pi \cdot \text{tg}x} = \text{tg}x$

g) $\text{sen}(2\pi - x) = \text{sen}2\pi \cdot \cos x - \cos 2\pi \cdot \text{sen}x = -\text{sen}x$

h) $\cos(2\pi - x) = \cos 2\pi \cdot \cos x + \text{sen}2\pi \cdot \text{sen}x = \cos x$

i) $\text{tg}(2\pi - x) = \dfrac{\text{tg}2\pi - \text{tg}x}{1 + \text{tg}2\pi \cdot \text{tg}x} = -\text{tg}x$

j) $\text{sen}(2\pi + x) = \text{sen}2\pi \cdot \cos x + \cos 2\pi \cdot \text{sen}x = \text{sen}x$

k) $\cos(2\pi + x) = \cos 2\pi \cdot \cos x - \text{sen}2\pi \cdot \text{sen}x = \cos x$

l) $\text{tg}(2\pi + x) = \dfrac{\text{tg}2\pi + \text{tg}x}{1 - \text{tg}2\pi \cdot \text{tg}x} = \text{tg}x$

Questão – 9.42 – Este exercício é idêntico ao anterior

Questão – 9.43 – Este exercício é idêntico ao 9.41

Questão – 9.44

Solução:

$$\text{a) } y = \frac{\operatorname{sen}(2\pi-\alpha)\cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot \operatorname{cotg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(2\pi+\alpha)\cdot \operatorname{tg}(\pi+\alpha)} =$$

$$= \frac{-\operatorname{sen}\alpha.\left(\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}\right).\left(\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}\right)}{\cos\alpha.\left(\frac{\operatorname{sen}(\pi+\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)}\right)} = \frac{-\operatorname{sen}\alpha.\left(\frac{\cos\alpha}{-\operatorname{sen}\alpha}\right).\left(\frac{-\operatorname{sen}\alpha}{-\cos\alpha}\right)}{\cos\alpha.\left(\frac{-\operatorname{sen}\alpha}{-\cos\alpha}\right)} = 1$$

$$\text{b) } \frac{\operatorname{sen}(\pi-\alpha)\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cos(\pi+\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)\cdot\cos(2\pi-\alpha)-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha+(-\cos\alpha)(-\cos\alpha)}{-\cos\alpha\cdot\cos\alpha-\cos\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{-2\cos^2\alpha} = -\frac{1}{2}\cdot\sec^2\alpha$$

Questão – 9.45

Solução:

Note que:

$$\operatorname{tg}125^\circ = \operatorname{tg}\left(90^\circ+35^\circ\right) = -\operatorname{cotg}35^\circ = -\frac{1}{a}$$

$$\operatorname{tg}215^\circ = \operatorname{tg}\left(180^\circ+35^\circ\right) = \operatorname{tg}35^\circ = a$$

$$\operatorname{tg}235^\circ = \operatorname{tg}\left(270^\circ-35^\circ\right) = \operatorname{cotg}35^\circ = \frac{1}{a}$$

$$\operatorname{tg}325^\circ = \operatorname{tg}\left(360^\circ-35^\circ\right) = -\operatorname{tg}35^\circ = -a$$

Assim, temos que:

$$y = \frac{tg215^\circ - tg125^\circ}{tg235^\circ + tg325^\circ} = \frac{a + \frac{1}{a}}{-a + \frac{1}{a}} = \frac{1 + a^2}{1 - a^2}$$

Questão – 9.46

Solução:

$$sen\frac{9\pi}{2} + sen\left(\alpha + \frac{13\pi}{2}\right) \cdot \cos(\alpha - 7\pi) = sen\frac{\pi}{2} + sen\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos(7\pi - \alpha) =$$

$$= 1 + (\cos\alpha) \cdot (-\cos\alpha) = 1 - \cos^2\alpha = sen^2\alpha$$

Questão – 9.47

Solução:

$$y = sen990^\circ - \frac{\cos\left(x + 1620^\circ\right) \cdot tg\left(x + 630^\circ\right)}{sen\left(900^\circ - x\right)} = sen270^\circ - \frac{\cos\left(x + 180^\circ\right) \cdot tg\left(x + 270^\circ\right)}{sen\left(180^\circ - x\right)} =$$

$$= -1 - \left(\frac{-\cos x}{senx} \cdot \frac{sen\left(x + 270^\circ\right)}{sen\left(x + 270^\circ\right)} \right) = -1 + \left(\frac{\cos x}{senx} \cdot \frac{-\cos x}{senx} \right) = -1 - \left(\frac{\cos x}{senx} \right)^2$$

Note que:

$$sen^2x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{4}{5} \quad \text{e} \quad sen^2x = \frac{1}{5}$$

Temos que:

$$y = -1 - \left(\frac{\cos x}{senx} \right)^2 = -1 - 4 = -5$$

Questão – 9.48

Solução:

$$\text{sen}(180^\circ + x) = -\text{sen}x \Rightarrow \text{sen}(180^\circ + x) + \text{sen}x = 0$$

Assim, temos que:

$$\text{sen}180^\circ + \text{sen}0^\circ = 0$$

$$\text{sen}181^\circ + \text{sen}1^\circ = 0$$

$$\text{sen}182^\circ + \text{sen}2^\circ = 0$$

$$\text{sen}183^\circ + \text{sen}3^\circ = 0$$

.....

$$\text{sen}359^\circ + \text{sen}179^\circ = 0$$

Logo temos que

$E = 0$

Questão – 9.49

Solução:

$$\cos(180^\circ - x) = -\cos \Rightarrow \cos(180^\circ - x) + \cos x = 0$$

Assim, temos que:

$$\cos 160^\circ + \cos 20^\circ = 0$$

$$\cos 140^\circ + \cos 40^\circ = 0$$

$$\cos 120^\circ + \cos 60^\circ = 0$$

$$\cos 100^\circ + \cos 80^\circ = 0$$

Logo, temos que:

$E = \cos 180^\circ = -1$

Questão – 9.50

Solução:

$x + y + z = 180$, logo $tg(x + y + z) = \dfrac{tgx + tg(y + z)}{1 - tgx \cdot tg(y + z)} = 0$

Por outro lado, temos que $tg(y + z) = \dfrac{tgy + tg(z)}{1 - tgy \cdot tg(z)}$

Substituindo isso no resultado anterior, temos que:

$tgx(1 - tgy \cdot tgz) + tg(y + z) = 0 \Rightarrow tgx + tgy + tgz = tgx \cdot tgy \cdot tgz$.

Capítulo 10

Fórmulas do Arco Duplo, Arco Triplo e Arco Metade

Capítulo 10
Fórmulas do Arco Duplo, Arco Triplo e Arco Metade

Questão – 10.18

Solução:

$$\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1 \Rightarrow \cos^2 a = 1 - \frac{1}{9} \Rightarrow \cos a = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\frac{\pi}{2} < a < \pi \Rightarrow \cos a = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \text{sen}2a = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

Questão – 10.19

Solução:

$$\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1 \Rightarrow \cos^2 a = 1 - \frac{6 - 2\sqrt{5}}{16} \Rightarrow \cos^2 a = \frac{10 + 2\sqrt{5}}{16}$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a = \left(\frac{10 + 2\sqrt{5}}{16}\right) - \left(\frac{6 - 2\sqrt{5}}{16}\right) =$$

$$= \frac{4 + 4\sqrt{5}}{16} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

Questão – 10.20

Solução:

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 x = 1 - \frac{1}{3} \Rightarrow \text{sen}^2 x = \frac{2}{3} \Rightarrow \text{sen}x = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$0 < a < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{sen}x = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \text{tg}x = \frac{\text{sen}x}{\cos x} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$$

Temos que:

$$\text{tg}2x = \frac{2\text{tg}x}{1 - \text{tg}^2 x} = \frac{2\sqrt{2}}{-1} = -2\sqrt{2} \Rightarrow \text{tg}4x = \frac{2\text{tg}2x}{1 - \text{tg}^2 2x} = \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

Questão – 10.21

Solução:

$$\text{sen}^2 19^\circ + \cos^2 19^\circ = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 19^\circ = 1 - \left(\frac{19}{20}\right)^2 \Rightarrow \text{sen}^2 19^\circ = \frac{39}{400}$$

$$\cos 38^\circ = \cos^2 19^\circ - \text{sen}^2 19^\circ = \frac{361}{400} - \frac{39}{400} = \frac{322}{400}$$

$$\cos 38^\circ = \frac{322}{400} = 0{,}805 \approx 0{,}81$$

Questão – 10.22

Solução:

$$\cos(\pi - x) \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \cdot \text{sen}(\pi + x) =$$

$$= -\cos(x) \cdot \cos(x) - \text{sen}x \cdot (-\text{sen}x) = -\cos^2 x + \text{sen}^2 x = -\cos 2x$$

Questão – 10.23

Solução:

$$y = \frac{\text{sen}4x}{\text{sen}x \cdot \cos 2x} = \frac{2 \cdot \text{sen}2x \cdot \cos 2x}{\text{sen}x \cdot \cos 2x} = \frac{2 \cdot 2 \cdot \text{sen}x \cdot \cos x}{\text{sen}x} = 4\cos x$$

Questão – 10.24

Solução:

$$\cos^4 x - \text{sen}^4 x = \cos^4 x - \left(1 - \cos^2 x\right)^2 = -1 + 2\cos^2 x = \cos 2x$$

$$\text{sen}2x = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \text{sen}^2 2x = \frac{1}{5} \Rightarrow \cos^2 2x = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos 2x = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Questão – 10.25

Solução:

$$\text{sen}\alpha - \cos\alpha = m \Rightarrow (\text{sen}\alpha - \cos\alpha)^2 = m^2$$

$$\left(\text{sen}^2\alpha - 2.\text{sen}\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha\right)^2 = m^2 \Rightarrow 1 - \text{sen}2\alpha = m^2 \Rightarrow 1 - m^2 = \text{sen}2\alpha$$

Questão – 10.26

Solução:

$$y = \cos 4x + 8 \cdot (\text{sen}x \cdot \cos x)^2 = \cos^2 2x - \text{sen}^2 2x + 8 \cdot \left(\text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x\right)$$

$$\cos^2 2x - (2\text{sen}x \cdot \cos x)^2 + 8 \cdot \left(\text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x\right) =$$

$$= \cos^2 2x + 4 \cdot \left(\text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x\right) = \left(2 \cdot \cos^2 x - 1\right)^2 + 4 \cdot \left(\left(1 - \cos^2 x\right) \cdot \cos^2 x\right) =$$

$$= 4 \cdot \cos^4 x - 4\cos^2 x + 1 - 4 \cdot \cos^4 x + 4 \cdot \cos^2 x = 1$$

Questão – 10.27

Solução:

$$y = \text{sen}4x \cdot \text{cotg}2x - \cos 4x = 2 \cdot \text{sen}2x \cdot \cos 2x \cdot \frac{\cos 2x}{\text{sen}2x} - \cos 4x =$$

$$= 2 \cdot \cos^2 2x - \cos 4x = 2 \cdot \cos^2 2x - \left(2 \cdot \cos^2 2x - 1\right) = 1$$

Questão – 10.28

Solução:

$$y = \frac{\text{cotg}x - \text{tg}x}{\text{cotg}2x} = \frac{\dfrac{\cos x}{\text{sen}x} - \dfrac{\text{sen}x}{\cos x}}{\text{cotg}2x} = \frac{\dfrac{\cos^2 x - \text{sen}^2 x}{\text{sen}x \cdot \cos x}}{\text{cotg}2x} = \frac{\dfrac{\cos 2x}{\text{sen}2x}}{\text{cotg}2x} =$$

$$= \frac{\dfrac{2 \cdot \cos 2x}{\text{sen}2x}}{\text{cotg}2x} = \frac{2 \cdot \text{cotg}2x}{\text{cotg}2x} = 2$$

Questão – 10.29

Solução:

a) $\text{sen}x \cdot \cos x = \dfrac{2.\text{sen}x \cdot \cos x}{2} = \dfrac{\text{sen}2x}{2} \Rightarrow -\dfrac{1}{2} \leq m \leq \dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{\sec x}{\text{sen}x + \cos x} + \dfrac{\sec x}{\cos x - \text{sen}x} = \left(\dfrac{1}{\cos x}\right) \cdot \dfrac{\cos x - \text{sen}x}{\cos^2 x - \text{sen}^2 x} + \dfrac{\cos x + \text{sen}x}{\cos^2 x - \text{sen}^2 x} =$

$= \left(\dfrac{1}{\cos x}\right) \cdot \dfrac{2\cos x}{\cos^2 x - \text{sen}^2 x} = \dfrac{2}{\cos 2x} \Rightarrow \dfrac{m^2}{2} \geq 2 \Rightarrow m^2 \geq 4$

Assim temos que $m \geq 2$ ou $m \leq -2$.

Questão – 10.30

Solução:

$$\text{sen}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \Rightarrow \text{sen}19^\circ = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 38^\circ}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-a}{2}}$$

E como $\text{sen}19 > 0$ então, temos que:

$$\text{sen}19^\circ = \sqrt{\frac{1-a}{2}}$$

Questão – 10.31

Solução:

$$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \Rightarrow \cos 22^\circ 30' = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 45^\circ}{2}} =$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

E como $\cos 22^{\circ}30' > 0$ então, temos que:

$$\cos 22^{\circ}30' = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

Questão – 10.32

Solução:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \Rightarrow \operatorname{tg}22^{\circ}30' = \pm\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}} = \pm\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} =$$

$$= \pm\sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}{2}} = \pm\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \pm\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2} = \pm\left(\sqrt{2}-1\right)$$

E como $\operatorname{tg}22^{\circ}30' > 0$ então temos que $\operatorname{tg}22^{\circ}30' = \sqrt{2}-1$

Questão – 10.33

Solução:

$$\operatorname{cotg}x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen}x} = \frac{4}{3} \Rightarrow \cos x = \frac{4}{3}\cdot \operatorname{sen}x \Rightarrow \cos^2 x = \frac{16}{9}\cdot \operatorname{sen}^2 x \Rightarrow 1 = \frac{25}{9}\cdot \operatorname{sen}^2 x$$

$$\operatorname{sen}x = \frac{3}{5} \Rightarrow \operatorname{sen}3x = 3\cdot\left(\frac{3}{5}\right) - 4\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \left(\frac{9}{5}\right) - \left(\frac{108}{125}\right) = \frac{225-108}{125} = \frac{117}{125}$$

Questão – 10.34

Solução:

$$\cos 3x \cdot \sec x = \left(4\cdot\cos^3 x - 3\cos x\right)\cdot\left(\frac{1}{\cos x}\right) = 4\cdot\cos^2 x - 3 =$$

$$= 2\cdot\left(2\cdot\cos^2 x - 1\right) - 1 = 2\cdot\cos 2x - 1 = \frac{1}{10} \Rightarrow \cos 2x = \frac{11}{20}$$

Questão – 10.35

Solução:

$$tg3x = tg(2x + x) = \frac{tg2x + tgx}{1 - tg2x.tgx} = \frac{\dfrac{2tgx}{1 - tg^2x} + tgx}{1 - \left(\dfrac{2tgx}{1 - tg^2x}\right).tgx} = \frac{\dfrac{3tgx - tg^3x}{1 - tg^2x}}{\dfrac{1 - 3tg^2x}{1 - tg^2x}} = \frac{3tgx - tg^3x}{1 - 3tg^2x}$$

Questão – 10.36

Solução:

$$2\cos x - 9\operatorname{sen}x = 2\left(\frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}}\right) - 9\left(\frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}}\right) = 2\left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right) - 9\left(\frac{2t}{1 + t^2}\right) =$$

$$= \frac{2 - 18t - 2t^2}{1 + t^2} = -6 \Rightarrow 2 - 18t - 2t^2 = -6t^2 - 6$$

$$4t^2 - 18t + 8 = 0 \Rightarrow 2t^2 - 9t + 4 = 0 \Rightarrow t = \frac{9 \pm 7}{4}$$

Logo: $t = 4$ (o que não é possível pelo motivo apresentado no gabarito do livro-texto)

$$t = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2 \cdot \operatorname{sen}\frac{x}{2} = \cos\frac{x}{2} \quad \text{com} \quad \operatorname{sen}^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} = 1, \text{ o que implica}$$

que: $\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ e $\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \cos x = 2 \cdot \left(\cos^2\frac{x}{2}\right) - 1 = \frac{3}{5}$$

$$\operatorname{sen}x = 2\operatorname{sen}\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2} = 2 \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{4}{5} \Rightarrow 2\cos x - 9\operatorname{sen}x =$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right) - 9 \cdot \left(\frac{4}{5}\right) = -6.$$

Capítulo 11

Transformação em Produto

Capítulo 11
Transformação em Produto

Parte 1 – Exercícios propostos

Questão – 11.11

Solução:

a) $\text{sen}6x + \text{sen}2x = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{6x+2x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{6x-2x}{2}\right) = 2 \cdot \text{sen}4x \cdot \cos 2x$

b) $\cos 7x + \cos 3x = 2 \cdot \cos\left(\frac{7x+3x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{7x-3x}{2}\right) = 2 \cdot \cos 5x \cdot \cos 2x$

c) $\text{sen}x - \text{sen}3x = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{x-3x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x+3x}{2}\right) = 2 \cdot \text{sen}(-x) \cdot \cos 2x =$

$= -2 \cdot \text{sen}x \cdot \cos 2x$

d) $\cos 3x - \cos 9x = -2 \cdot \text{sen}\left(\frac{3x-9x}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{3x+9x}{2}\right) =$

$= -2 \cdot \text{sen}(-3x) \cdot \cos 6x = 2 \cdot \text{sen}3x \cdot \text{sen}6x$

Questão – 11.12

Solução:

a) $1 - 2\text{sen}2x = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \text{sen}2x\right) = 2 \cdot \left(\text{sen}\frac{\pi}{6} - \text{sen}2x\right) =$

$= 2 \cdot \left(2\text{sen}\left(\frac{\pi}{12} - x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12} + x\right)\right) = 4 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{12} - x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12} + x\right)$

b) $\text{sen}2x + 2\text{sen}x = 2.\text{sen}x \cdot \cos x + 2\text{sen}x = 2 \cdot \text{sen}x \cdot (1 + \cos x) =$

$= 2\text{sen}x \cdot (\cos 0 + \cos x) = 2\text{sen}x \cdot 2\cos\left(\frac{0+x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{0-x}{2}\right) =$

$= 4\text{sen}x \cdot \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2} = 4\text{sen}x \cdot \cos^2\frac{x}{2}$

c) $\text{sen}x + \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos x = 2 \cdot \cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

d) $\text{sen}3x - \cos x = \text{sen}3x - \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2 \cdot \text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Questão – 11.13

Solução:

a) $\text{sen}11x + \text{sen}3x = 2 \cdot \text{sen}7x \cdot \cos 4x$

$\text{sen}15x - \text{sen}x = 2 \cdot \text{sen}7x \cdot \cos 8x$

$(\text{sen}11x + \text{sen}3x) + (\text{sen}15x - \text{sen}x) =$

$= 2.\text{sen}7x \cdot \cos 4x + 2.\text{sen}7x \cdot \cos 8x = 2 \cdot \text{sen}7x \cdot (\cos 4x + \cos 8x) =$

$= 4 \cdot \text{sen}7x \cdot \cos 6x \cdot \cos 2x$

b) $\cos 5x + \cos x = 2 \cdot \cos 3x \cdot \cos 2x$

$\text{sen}9x + \text{sen}3x = 2 \cdot \text{sen}6x \cdot \cos 3x$

$(\cos 5x + \cos x) + (\text{sen}9x + \text{sen}3x) =$

$= 2 \cdot \cos 3x \cdot \cos 2x + 2 \cdot \cos 3x \cdot \text{sen}6x = 2 \cdot \cos 3x \cdot (\cos 2x + \text{sen}6x) =$

$= 2 \cdot \cos 3x \cdot \left(\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + \text{sen}6x\right) = 2 \cdot \cos 3x \cdot \left(2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) \cdot \cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right)\right) =$

$= 4 \cdot \cos 3x \cdot \left(\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) \cdot \cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right)\right)$

Questão – 11.14

Solução:

$$y = \frac{\cos 9x + \cos 7x}{\text{sen}9x - \text{sen}7x} = \frac{2 \cdot \cos 8x \cdot \cos x}{2 \cdot \text{sen}x \cdot \cos 8x} = \frac{\cos x}{\text{sen}x} = \text{cotg}x$$

Questão – 11.15

Solução:

$$y = \frac{\text{sen}100^\circ + \text{sen}20^\circ}{\cos 100^\circ + \cos 20^\circ} = \frac{2.\text{sen}60^\circ \cdot \cos 40^\circ}{2.\cos 60^\circ \cdot \cos 40^\circ} = \frac{\text{sen}60^\circ}{\cos 60^\circ} = \text{tg}60^\circ = \sqrt{3}$$

Questão – 11.16

Solução:

$$y = \frac{\text{sen}a - \text{sen}b}{\cos b - \cos a} = \frac{2.\text{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)}{-2 \cdot \text{sen}\left(\frac{b-a}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)} =$$

$$= \frac{2 \cdot \text{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)}{-\left(-2 \cdot \text{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)} = \text{cotg}\left(\frac{a+b}{2}\right) = \text{cotg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$$

Questão – 11.17

Solução:

Já vimos na questão 9.29 que: $\text{sen}(a+b) \cdot \text{sen}(a-b) = \cos^2 b - \cos^2 a$

Temos que:

$$\text{sen}(a+b) \cdot \text{sen}(a-b) = \cos^2 b - \cos^2 a = 1 - \text{sen}^2 b - \left(1 - \text{sen}^2 a\right) =$$

$$= \text{sen}^2 a - \text{sen}^2 b$$

Questão – 11.18

Solução:

$$y = \text{sen}^2 3x - \cos^2 x \Rightarrow 2y = 2\text{sen}^2 3x - 2\cos^2 x$$

$$2y = \left(\left(2\text{sen}^2 3x\right) - 1\right) - \left(2\cos^2 x - 1\right) = -\cos 6x - \cos 2x$$

$$2y = -(\cos 6x + \cos 2x) = -(2 \cdot \cos 4x \cdot \cos 2x)$$

$$y = -\cos 4x \cdot \cos 2x$$

Questão – 11.19

Solução:

$$y = tg3x - tgx = \frac{sen2x}{\cos 3x.\cos x} = \frac{2.senx \cdot \cos x}{\cos 3x \cdot \cos x} = \frac{2 \cdot senx}{\cos 3x} = 2 \cdot senx \cdot sec 3x$$

Questão – 11.20 – Resolvido no final do livro-texto

Questão – 11.21

Solução:

$$tg10^{\circ} + tg40^{\circ} = \frac{sen50^{\circ}}{\cos 10^{\circ} \cdot \cos 40^{\circ}} = \frac{1}{\cos 10^{\circ}} = \frac{1}{0,98} \approx 1,02$$

Questão – 11.22 – Resolvido no final do livro - texto

Questão – 11.23

Solução:

a) $\frac{p+q}{2} = 40^{\circ}$ e $\frac{p-q}{2} = 12^{\circ} \Rightarrow p = 52^{\circ}$ e $q = 28^{\circ}$

$$sen52^{\circ} + sen28^{\circ} = 2 \cdot sen40^{\circ} \cdot \cos 12^{\circ}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left(sen52^{\circ} + sen28^{\circ}\right) = sen40^{\circ} \cdot \cos 12^{\circ}$$

b) $\frac{p+q}{2} = 5x$ e $\frac{p-q}{2} = x \Rightarrow p = 6x$ e $q = 4x$

$$\cos 6x + \cos 4x = 2.\cos 5x \cdot \cos x$$

c) $\frac{p+q}{2} = 3x$ e $\frac{p-q}{2} = 2x \Rightarrow p = 5x$ e $q = x$

$$\cos 5x - \cos x = -2 \cdot sen3x \cdot sen2x$$

$$\cos x - \cos 5x = 2 \cdot sen3x \cdot sen2x$$

Questão – 11.24 – Este problema pode ser resolvido de modo análogo ao problema 11.23

Questão – 11.25

Solução:

$\text{sen}3x - \text{sen}x = 2 \cdot \cos 2x \cdot \text{sen}x$ (I)

$\text{sen}5x - \text{sen}3x = 2 \cdot \cos 4x \cdot \text{sen}x$ (II)

$\text{sen}7x - \text{sen}5x = 2 \cdot \cos 6x \cdot \text{sen}x$ (III)

Somando (I) + (II) + (III) temos que:

$$\text{sen}7x - \text{sen}x = (2\cos 2x \cdot \text{sen}x) + (2\cos 4x \cdot \text{sen}x) + (2\cos 6x \cdot \text{sen}x)$$

$$\text{sen}7x = \text{sen}x(2\cos 2x + 2\cos 4x + 2\cos 6x + 1)$$

Questão – 11.26

Solução:

$\cos 90^\circ + \cos 40^\circ = 2\cos 65^\circ \cdot \cos 25^\circ \Rightarrow \cos 40^\circ = 2\cos 65^\circ \cdot \cos 25^\circ$ (I)

$\cos 270^\circ + \cos 20^\circ = 2\cos 145^\circ \cdot \cos 125^\circ \Rightarrow \cos 20^\circ = 2\cos 145^\circ \cdot \cos 125^\circ$ (II)

Multiplicando (I) com (II) temos que:

$\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ = 4\cos 65^\circ \cdot \cos 25^\circ \cdot \cos 145^\circ \cdot \cos 125^\circ$

$2\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ = 8\cos 65^\circ \cdot \cos 25^\circ \cdot \cos 145^\circ \cdot \cos 125^\circ =$

$= 2\cos(30^\circ + 10^\circ) \cdot \cos(30^\circ - 10^\circ) =$

$2(\cos 30^\circ \cdot \cos 10^\circ - \text{sen}30^\circ \cdot \text{sen}10^\circ) \cdot (\cos 30^\circ \cdot \cos 10^\circ - \text{sen}30^\circ \cdot \text{sen}10^\circ) =$

$= 2(\cos^2 30^\circ \cdot \cos^2 10^\circ - \text{sen}^2 30^\circ \cdot \text{sen}^2 10^\circ) =$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot a^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (1 - a^2) = \frac{4a^2 - 1}{2}$$

Parte 2 – Exercícios suplementares

Questão – III.1

Solução:

$$\operatorname{sen}(-x) = \frac{1}{2} \Rightarrow -\operatorname{sen}x = \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}x = -\frac{1}{2}$$

Temos que: $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$

Questão – III.2

Solução:

$$y = \frac{\cos 3x \cdot \cos x - \operatorname{sen}3x \cdot \operatorname{sen}x}{\left(1+\sqrt{2}.\cos 2x\right)\cdot\left(1-\sqrt{2}.\cos 2x\right)} = \frac{\cos 4x}{\left(1-2\cos^2 2x\right)} = \frac{\cos 4x}{(-\cos 4x)} = -1k$$

Questão – III.3

Solução:

$$\operatorname{sen}75^\circ = \operatorname{sen}\left(45^\circ + 30^\circ\right) = \operatorname{sen}30^\circ \cdot \cos 45^\circ + \operatorname{sen}45^\circ \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\operatorname{sen}\left(360^\circ - 75^\circ\right) = \operatorname{sen}285^\circ = -\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)$$

Questão – III.4 – Resolvido no final do livro-texto

Questão – III.5

Solução:

$$\operatorname{sen}a = \frac{2}{3} \Rightarrow \cos a = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\operatorname{sen}b = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \cos b = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{sen}(a-b)+\cos(a+b)=\text{sen}a\cdot\cos b-\text{sen}b\cdot\cos a+\cos a\cdot\cos b-\text{sen}a\cdot\text{sen}b=$$

$$=\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)-\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}\right)+\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}\right)-\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}\right)=\frac{2\sqrt{5}+5}{15}$$

Questão – III.6

Solução:

$$\cot g(\alpha+\beta)=\frac{1}{tg(\alpha+\beta)}=\frac{1}{\dfrac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}}=\frac{1-tg\alpha\cdot tg\beta}{tg\alpha+tg\beta}=\frac{1-\dfrac{1}{\cot g\alpha}\cdot\dfrac{1}{\cot g\beta}}{\dfrac{1}{\cot g\alpha}+\dfrac{1}{\cot g\beta}}=$$

$$=\frac{\cot g\alpha\cdot\cot g\beta-1}{\cot g\alpha+\cot g\beta}$$

Questão – III.7

Solução:

Já sabemos que:

$$\cot g(\alpha+\beta)=\frac{\cot g\alpha\cdot\cot g\beta-1}{\cot g\alpha+\cot g\beta}$$

E como $\alpha+\beta=-\frac{\pi}{3}$, temos que:

$$-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\cot g\alpha\cdot\cot g\beta-1}{\cot g\alpha+\cot g\beta}\Rightarrow-\sqrt{3}\cdot(\cot g\alpha+\cot g\beta)=3\cdot(\cot g\alpha.\cot g\beta-1)$$

$$3(\cot g\alpha\cdot\cot g\beta-1)+\sqrt{3}(\cot g\alpha+\cot g\beta)=0$$

$$3\cot g\alpha\cdot\cot g\beta+1+\sqrt{3}(\cot g\alpha+\cot g\beta)=4$$

A expressão pedida no problema é:

$$\left(1+\sqrt{3}\cot ga\right)\cdot\left(1+\sqrt{3}\cot gb\right)=3\cot g\alpha\cdot\cot g\beta+1+\sqrt{3}(\cot g\alpha+\cot g\beta)=4$$

Questão – III.8

Solução:

$$\cot g\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}=\operatorname{tg}\alpha \qquad (I)$$

$$\operatorname{tg}(\pi-2\alpha)=\frac{\operatorname{sen}(\pi-2\alpha)}{\cos(\pi-2\alpha)}=\frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{-\cos(2\alpha)}=-\operatorname{tg}2\alpha \qquad (II)$$

$$\operatorname{tg}(2\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha \qquad (III)$$

$$\cot g\left(\frac{3\pi}{2}+2\alpha\right)=\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2\alpha\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}+2\alpha\right)}=\frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{-\cos(2\alpha)}=-\operatorname{tg}2\alpha \qquad (IV)$$

Usando (I),(II),(III) e (IV) temos que

$$y=\frac{\cot g\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\operatorname{tg}(\pi-2\alpha)}{\operatorname{tg}(2\pi-\alpha)\cdot\cot g\left(\frac{3\pi}{2}+2\alpha\right)-1}=\frac{\operatorname{tg}(\alpha)-\left(-\operatorname{tg}(2\alpha)\right)}{-\operatorname{tg}(\alpha)\cdot\left(-\operatorname{tg}(2\alpha)\right)-1}=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}(\alpha)+\operatorname{tg}(2\alpha)}{\operatorname{tg}(\alpha)\cdot\operatorname{tg}(2\alpha)-1}=-\operatorname{tg}(3\alpha)$$

Questão – III.9

Solução:

Seja:
arcsen a = $\alpha \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = a$
arcsen b = $\beta \Rightarrow \operatorname{sen}\beta = b$
arccos b = $\theta \Rightarrow \cos\theta = b$

Como $\cos\theta = b = \operatorname{sen}\beta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}-\beta$

$$y = \frac{\operatorname{sen}(\pi - \operatorname{arcsen} a) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arcsen} b\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \operatorname{arcsen} a\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccos} b\right)} = \frac{\operatorname{sen}(\pi - \alpha) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(\alpha) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \operatorname{sen}(\beta)} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha) - \operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{sen}(\alpha) + \operatorname{sen}(\beta)} = \frac{a - b}{a + b}$$

Questão – III.10 – Resolvido no final do livro-texto

Questão – III.11

Solução:

$$\arccos\frac{1}{3} = \alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{3}$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\operatorname{sen}2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

Questão – III.12

Solução:

$$\operatorname{arcsen}\frac{3}{4} = \alpha \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{4}$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\operatorname{sen}2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{9}{16} - \frac{7}{16} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

$$\cos 4\alpha = \cos^2 2\alpha - \operatorname{sen}^2 2\alpha = \frac{1}{64} - \frac{63}{64} = -\frac{62}{64} = -\frac{31}{32}$$

Questão – III.13

Solução:

$$\text{arctg}2 = \alpha \Rightarrow \text{tg}\alpha = 2 \Rightarrow \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = 2 \Rightarrow \text{sen}\alpha = 2\cos\alpha \Rightarrow \text{sen}^2\alpha = 4\cos^2\alpha$$

$$5\cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{5}}{5}}{1+\frac{\sqrt{5}}{5}}} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{30-10\sqrt{5}}{20}} = \sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{4}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Para mais detalhes sobre cálculos com radicais duplos, veja o apêndice no final do livro.

Questão – III.14 – Resolvido no final do livro-texto

Questão – III.15

Solução:

a) $\cos(15^\circ) = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \text{sen}45^\circ \cdot \text{sen}30^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

b) $\cos\left(\frac{30^\circ}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$

Note que: $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$.

Para mais detalhes sobre cálculos com radicais duplos, veja o apêndice no final do livro.

Questão – III.16

Solução:

$$y = \frac{\text{sen}(3n\alpha)}{\text{sen}(n\alpha)} + \frac{\cos(3n\alpha)}{\cos(n\alpha)} = \frac{\text{sen}(3n\alpha)\cdot\cos(n\alpha) + \cos(3n\alpha)\cdot\text{sen}(n\alpha)}{\text{sen}(n\alpha)\cdot\cos(n\alpha)} =$$

$$= \frac{\text{sen}(4n\alpha)}{\text{sen}(n\alpha)\cdot\cos(n\alpha)} = \frac{\text{sen}(4n\alpha)}{\frac{\text{sen}(2n\alpha)}{2}} = \frac{2\text{sen}(2n\alpha)\cdot\cos(2n\alpha)}{\frac{\text{sen}(2n\alpha)}{2}} = 4\cdot\cos(2n\alpha)$$

Questão – III.17

Solução:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\operatorname{sen}x\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cdot\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\operatorname{sen}x-\cos x)$$

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{1}{2}\cdot(\operatorname{sen}x-\cos x)^2=\frac{1}{2}\cdot\left(\operatorname{sen}^2x-2\cdot\operatorname{sen}x\cdot\cos x+\cos^2 x\right)=\frac{1-m}{2}$$

Note: $\frac{\pi}{4}-x+\frac{\pi}{4}+x=\frac{\pi}{2}$

Logo:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$$

Assim, temos que:

$$y=\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{1-m}{2}+\frac{1-m}{2}=1-m$$

Questão – III.18

Solução:

$$y=\frac{\operatorname{sen}3x+\operatorname{sen}x}{4\operatorname{sen}x}=\frac{2\cdot\operatorname{sen}2x\cdot\cos x}{4\operatorname{sen}x}=\frac{2\cdot(2\cdot\operatorname{sen}x\cdot\cos x)\cdot\cos x}{4\operatorname{sen}x}=\cos^2 x$$

Questão – III.19

Solução:

$$y=\frac{\cos x-\cos y}{\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}y}=\frac{-2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)}=-\operatorname{tg}\left(\frac{x+y}{2}\right)=-\operatorname{tg}\left(\frac{\frac{\pi}{4}}{2}\right)=$$

$$= -tg\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}} = -\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = -\left(\sqrt{2}-1\right) = 1-\sqrt{2}$$

Questão – III.20

Solução:

$$y = \frac{\text{sen}40^\circ + \text{sen}10^\circ}{\cos 80^\circ + \cos 50^\circ} = \frac{2\cdot \text{sen}25^\circ \cdot \cos 15^\circ}{2\cdot \cos 65^\circ \cdot \cos 15^\circ} = \frac{\text{sen}25^\circ}{\cos 65^\circ} = 1$$

Questão – III.21

Solução:

$$y = \frac{\cos\alpha - \cos 7\alpha}{2(\text{sen}\alpha.\text{sen}5\alpha + \text{sen}^2\alpha)} = \frac{-2\text{sen}4\alpha\cdot \text{sen}(-3\alpha)}{2\text{sen}\alpha\cdot(\text{sen}5\alpha + \text{sen}\alpha)}$$

$$= \frac{2\text{sen}4\alpha\cdot \text{sen}(3\alpha)}{2\text{sen}\alpha\cdot(2\text{sen}3\alpha\cdot\cos 2\alpha)} = \frac{2\text{sen}2\alpha\cdot\cos(2\alpha)}{2\text{sen}\alpha\cdot(2\cos 2\alpha)} = \frac{2\text{sen}\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos(2\alpha)}{2\text{sen}\alpha\cdot(2\cos 2\alpha)} = 2\cos\alpha$$

Questão – III.22

Solução:

$$\text{sen}(a+b)\cdot\text{sen}(a-b) = (\text{sen}a\cdot\cos b + \text{sen}b\cdot\text{sen}a)\cdot(\text{sen}a\cdot\cos b - \text{sen}b\cdot\cos a) =$$

$$= \left((\text{sen}a\cdot\cos b)^2 - (\text{sen}b\cdot\cos a)^2\right) = \left(\left(\text{sen}^2 a\cdot\cos^2 b\right) - \left(\text{sen}^2 b\cdot\cos^2 a\right)\right) =$$

$$= \left(\left(1-\cos^2 a\right)\cdot\left(\cos^2 b\right) - \left(1-\cos^2 b\right)\cdot\left(\cos^2 a\right)\right) =$$

$$= \cos^2 b - \cos^2 b\cdot\cos^2 a - \cos^2 a + \cos^2 b\cdot\cos^2 a = \cos^2 b - \cos^2 a$$

$$\text{sen}(a+b)\cdot\text{sen}(b-a) = \cos^2 a - \cos^2 b$$

Questão – III.23

Solução:

$$\text{senA} + \text{senB} + \text{senC} = \text{senA} + 2\text{sen}\left(\frac{B+C}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{B-C}{2}\right) =$$

$$= \text{sen A} + 2\cos\left(\frac{A}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{B-C}{2}\right) = 2\text{sen}\left(\frac{A}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{A}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{A}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{B-C}{2}\right) =$$

$$2\cos\left(\frac{A}{2}\right)\cdot\left(\text{sen}\frac{A}{2} + \cos\frac{B-C}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{A}{2}\right)\cdot\left(\cos\frac{B+C}{2} + \cos\frac{B-C}{2}\right) =$$

$$= 2\cos\left(2\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}\right) = 4\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}.$$

Questão – III.24

Solução:

$$y = \text{tga} + \text{tgb} - \frac{\text{sen}(a+b)}{\text{sena}\cdot\text{senb}} = \frac{\text{sena}}{\text{cosa}} + \frac{\text{senb}}{\text{cosb}} - \frac{\text{sen}(a+b)}{\text{sena}\cdot\text{senb}} =$$

$$= \frac{\text{sena}\cdot\text{cosb} + \text{senb}\cdot\text{cosa}}{\text{cosa}\cdot\text{cosb}} - \frac{\text{sen}(a+b)}{\text{sena}\cdot\text{senb}} = \frac{\text{sen}(a+b)}{\text{cosa}\cdot\text{cosb}} - \frac{\text{sen}(a+b)}{\text{sena}\cdot\text{senb}} =$$

$$= \text{sen}(a+b)\cdot\left(\frac{1}{\text{cosa}\cdot\text{cosb}} - \frac{1}{\text{sena}\cdot\text{senb}}\right) =$$

$$= \text{sen}(a+b)\cdot\left(\frac{\text{sen}(a)\cdot\text{senb} - \cos(a)\cdot\cos b}{\cos(a)\cdot\cos b\cdot\text{sen}(a)\cdot\text{senb}}\right) = \text{sen}(a+b)\cdot\left(-\frac{\cos(a+b)}{\text{cosa}\cdot\text{cosb}\cdot\text{sena}\cdot\text{senb}}\right) =$$

$$= \left(-\frac{\text{sen}(a+b)\cdot\cos(a+b)}{\frac{\text{sen2a}}{2}\cdot\frac{\text{sen2b}}{2}}\right) = \left(-4\cdot\frac{\text{sen}(a+b)\cdot\cos(a+b)}{\text{sen2a}\cdot\text{sen2b}}\right) =$$

$$= -2\cdot\left(\frac{2.\text{sen}(a+b)\cdot\cos(a+b)}{\text{sen2a}\cdot\text{sen2b}}\right) = -2\cdot\left(\frac{\text{sen}(2a+2b)}{\text{sen2a}\cdot\text{sen2b}}\right)$$

Questão – III.25

Solução 1:

$$tg81^\circ + tg9^\circ = \frac{sen90^\circ}{cos81^\circ \cdot cos9^\circ} \quad e$$

$$tg63^\circ + tg27^\circ = \frac{sen90^\circ}{cos63^\circ \cdot cos27^\circ} \Rightarrow tg81^\circ - tg63^\circ + tg9^\circ - tg27^\circ =$$

$$= \frac{1}{cos81^\circ \cdot cos9^\circ} - \frac{1}{cos63^\circ \cdot cos27^\circ} = \frac{cos63^\circ \cdot cos27^\circ - cos81^\circ \cdot cos9^\circ}{cos81^\circ \cdot cos9^\circ \cdot cos63^\circ \cdot cos27^\circ} =$$

$$= \frac{sen27^\circ \cdot cos27^\circ - sen9^\circ \cdot cos9^\circ}{sen9^\circ \cdot cos9^\circ \cdot sen27^\circ \cdot cos27^\circ} = \frac{\frac{sen54^\circ}{2} - \frac{sen18^\circ}{2}}{\frac{sen54^\circ}{2} \cdot \frac{sen18^\circ}{2}} =$$

$$= \frac{\frac{sen54^\circ - sen18^\circ}{2}}{\frac{sen54^\circ}{2} \cdot \frac{sen18^\circ}{2}} = \frac{\frac{2sen18^\circ \cdot cos36^\circ}{2}}{\frac{sen54^\circ}{2} \cdot \frac{sen18^\circ}{2}} = \frac{sen54^\circ \cdot sen18^\circ}{\frac{sen54^\circ}{2} \cdot \frac{sen18^\circ}{2}} = 4.$$

Solução 2:

Note que as raízes da equação $tg5x = 1$, são $tg9^\circ$, $tg45^\circ$, $tg81^\circ$, $tg177^\circ$ e $tg153^\circ$.

Como $tg(5x) = \frac{tg^5x - 10tg^3x + 5tgx}{5tg^4x - 10tg^2x + 1}$, temos que $tg5x = 1$

$$\frac{tg^5x - 10tg^3x + 5tgx}{5tg^4x - 10tg^2x + 1} = 1 \Rightarrow tg^5x - 5tg^4x - 10tgx - 1 = 0.$$

Usando as relações de Girard, temos que:

$$tg9^\circ + tg45^\circ + tg81^\circ + tg117^\circ + tg153^\circ = 5$$

$$tg9^\circ + tg81^\circ - tg63^\circ - tg27^\circ = 4,$$

Pois, $tg(180^\circ - x) = -tgx$ e $tg45^\circ = 1$

Capítulo 12

Equações Trigonométricas

Capítulo 12
Equações Trigonométricas

Questão – 12.27

Solução:

$7x = 5x + 2k\pi \Rightarrow 2x = 2k\pi \Rightarrow x = k\pi$

$7x = \pi - 5x + 2k\pi \Rightarrow 12x = \pi + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6},\ k \in \mathbb{Z}$

Questão – 12.28

Solução:

$2x = x + 2k\pi \Rightarrow x = 2k\pi$

$2x = -x + 2k\pi \Rightarrow 3x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$

Questão – 12.29

Solução:

No exercício resolvido 12.5 do livro-texto, já vimos que:

$tga + cotgb = 0 \Rightarrow a - b = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Usando em nosso problema:

$tgx = cotg\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow tgx = -cotg\left(-2x - \frac{\pi}{2}\right)$

$tgx + cotg\left(-2x - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow 3x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3}$

Questão – 12.30

Solução:

$$\text{sen}2x = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \text{sen}2x - \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\text{sen}2x - \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) = 0 \Rightarrow \text{sen}2x - \text{sen}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$$

$$2 \cdot \text{sen}\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

Agora temos 2 casos para analisar:

Caso 1: $\text{sen}\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0$

$$\text{sen}\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0 \Rightarrow \frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8} = k\pi \Rightarrow \frac{3x}{2} = \frac{\pi}{8} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}$$

Caso 2: $\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = 0$

$$\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{3\pi}{8} + k\pi \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

Questão – 12.31

Solução:

No exercício resolvido 12.5 do livro-texto, já vimos que:

$$\text{tg}a + \cot g b = 0 \Rightarrow a - b = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Usando em nosso problema:

$$tg\left(3x+\frac{5\pi}{4}\right)=\cot g\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=0 \Rightarrow \left(3x+\frac{5\pi}{4}\right)-\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

$$x+\frac{3\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi \Rightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Note que:

$$3x+\frac{5\pi}{4}=-\frac{3\pi}{4}+\frac{5\pi}{4}+3k\pi \Rightarrow 3x+\frac{5\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+3k\pi$$

Portanto, esta solução não satisfaz a condição de existência

Logo $S=\varnothing$

Questão – 12.32

Solução:

$$3+2\cos 2x=4\cos x \Rightarrow 3+2\cdot\left(2\cos^2 x-1\right)=4\cos x$$

$$4\cos^2 x-4\cos x+1=0 \Rightarrow \cos x=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

Questão – 12.33

Solução:

$$\sec x-\cos x=\operatorname{sen}x \Rightarrow \frac{1}{\cos x}-\cos x=\operatorname{sen}x \Rightarrow \frac{1-\cos^2 x}{\cos x}=\operatorname{sen}x$$

$$\operatorname{sen}^2 x=\operatorname{sen}x\cdot\cos x \Rightarrow \operatorname{sen}x\cdot(\operatorname{sen}x-\cos x)=0$$

$$\operatorname{sen}x\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos x\right)=0 \Rightarrow -2\cdot\operatorname{sen}x\cdot\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)=0$$

Agora temos 2 casos a analisar:

Caso 1: $\operatorname{sen}(x)=0$

$$\operatorname{sen}(x)=0 \Rightarrow x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Caso 2: $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=0$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=0 \Rightarrow \frac{\pi}{4}-x=k\pi \Rightarrow x=\frac{\pi}{4}-k\pi$$

Note que $x=\frac{\pi}{4}-k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ é côngruo a $x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Questão – 12.34

Solução:

$$\cos a-\cos x=\operatorname{sen}(x-a)\Rightarrow -2\operatorname{sen}\left(\frac{a-x}{2}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{a-x}{2}\right)=\operatorname{sen}(x-a)$$

$$2\operatorname{sen}\left(\frac{a-x}{2}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{a-x}{2}\right)=\operatorname{sen}(a-x)$$

$$2\operatorname{sen}\left(\frac{a-x}{2}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{a-x}{2}\right)=2\operatorname{sen}\left(\frac{a-x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{a-x}{2}\right)$$

$$2\operatorname{sen}\left(\frac{a-x}{2}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{a-x}{2}\right)-\cos\left(\frac{a-x}{2}\right)=0$$

$$2\operatorname{sen}\left(\frac{a-x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{a-x}{2}\right)-\cos\left(\frac{a-x}{2}\right)=0$$

$$-4\operatorname{sen}\left(\frac{a-x}{2}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=0$$

Agora temos 3 casos a analisar:

Caso1: $\operatorname{sen}\left(\frac{a-x}{2}\right)=0$

Neste caso, temos que:

$$\frac{a-x}{2}=k\pi \Rightarrow a-x=2k\pi \Rightarrow a-2k\pi=x \Rightarrow x=a+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Caso2: $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=0$

Neste caso, temos que:

$$\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}=k\pi \Rightarrow \pi-2x=4k\pi \Rightarrow 2x=\pi-4k\pi \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}-2k\pi$$

$$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\frac{a-x}{2}=k\pi \Rightarrow a-x=2k\pi \Rightarrow a-2k\pi=x \Rightarrow x=a+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Caso3: $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)=0$

Neste caso, temos que:

$$\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}=k\pi \Rightarrow \pi-2a=4k\pi \Rightarrow 2a=\pi-4k\pi \Rightarrow a=\frac{\pi}{2}-2k\pi$$

$$a=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Neste terceiro caso não temos solução, pois $a\neq\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Questão – 12.35

Solução:

$$\cos^2\left(\frac{x-a}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{x+a}{2}\right)=1 \Rightarrow 2\cos^2\left(\frac{x-a}{2}\right)+2\cos^2\left(\frac{x+a}{2}\right)=2$$

$$2\cos^2\left(\frac{x-a}{2}\right)-1+2\cos^2\left(\frac{x+a}{2}\right)-1=0$$

$$\cos(x-a)+\cos(x+a)=0 \Rightarrow 2\cos x\cdot\cos a=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

Questão – 12.36

Solução:

$$\operatorname{sen}(a+2x)+\operatorname{sen}(a)+\operatorname{sen}(a+x)=0 \Rightarrow 2\operatorname{sen}(a+x)\cdot\cos(x)+\operatorname{sen}(a+x)=0$$

$$\operatorname{sen}(a+x)\cdot(2\cdot\cos(x)+1)=0$$

Agora temos 2 casos a analisar

Caso 1: $\operatorname{sen}(a+x)=0$

$$\operatorname{sen}(a+x)=0 \Rightarrow x=-a+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Caso 2: $2\cdot\cos(x)+1=0$

$$2\cos(x)+1=0 \Rightarrow \cos x=-\frac{1}{2} \Rightarrow x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi$$

Note que: $x=\frac{\pi}{4}-k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ é côngruo a $x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Questão – 12.37

Solução:

$$\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}=0 \Rightarrow 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{24}\cdot\cos\left(x-\frac{7\pi}{24}\right)-\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}=0$$

$$2\operatorname{sen}\frac{\pi}{24}\cdot\cos\left(x-\frac{7\pi}{24}\right)-2\operatorname{sen}\frac{\pi}{24}\cdot\cos\frac{\pi}{24}=0$$

$$2\operatorname{sen}\frac{\pi}{24}\cdot\left(\cos\left(x-\frac{7\pi}{24}\right)-\cos\frac{\pi}{24}\right)=0 \Rightarrow x-\frac{7\pi}{24}=\pm\frac{\pi}{24}+2k\pi$$

$$x=\frac{7\pi}{24}\pm\frac{\pi}{24}+2k\pi \Rightarrow x=\frac{7\pi\pm\pi}{24}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Questão – 12.38

Solução:

$$\text{sen}^3 x \cdot \cos x = \frac{1}{4} + \text{sen}x \cdot \cos^3 x \Rightarrow \text{sen}^3 x \cdot \cos x - \text{sen}x \cdot \cos^3 x = \frac{1}{4}$$

$$\text{sen}x \cdot \cos x\left(\text{sen}^2 x - \cos^2 x\right) = \frac{1}{4} \Rightarrow \left(\frac{\text{sen}2x}{2}\right) \cdot (-\cos 2x) = \frac{1}{4}$$

$$2\text{sen}2x \cdot \cos 2x = -1 \Rightarrow \text{sen}4x = -1 \Rightarrow 4x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$$

Questão – 12.39

Solução:

$$\cos 8x + \cos 6x = 2 \cdot \cos 7x \cdot \cos x$$

$$\cos 8x + \cos 2x = 2 \cdot \cos 5x \cdot \cos 3x$$

Temos que::

$$\cos 7x \cdot \cos x = \cos 5x \cdot \cos 3x \Rightarrow \cos 8x + \cos 6x = \cos 8x + \cos 2x$$

$$\cos 6x = \cos 2x$$

Agora temos 2 casos a analisar.

Caso 1: $6x = 2x + 2k\pi$

$$6x = 2x + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

Caso 2: $6x = -2x + 2k\pi$

$$6x = -2x + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}$$

Fazendo a união das duas soluções, temos que:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Questão – 12.40

Solução:

$$\operatorname{sen}x \cdot \operatorname{sen}3x = \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}x \cdot \left(3\operatorname{sen}x - 4\operatorname{sen}^3 x\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow 6\operatorname{sen}^2 x - 8 \cdot \operatorname{sen}^4 x = 1$$

Faça: $y = \operatorname{sen}^2 x$.

Assim: $-8y^2 + 6y - 1 = 0$

Temos que: $y = \frac{1}{2}$ ou $y = \frac{1}{4}$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \operatorname{sen}x = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Questão – 12.41

Solução:

$$2 \cdot (\operatorname{sen}x + \cos x) = \sec x \Rightarrow 2 \cdot (\operatorname{sen}x + \cos x) = \frac{1}{\cos x}$$

$$2 \cdot \operatorname{sen}x \cdot \cos x + 2\cos^2 x = 1 \Rightarrow 2 \cdot \operatorname{sen}x \cdot \cos x + \left(2\cos^2 x\right) - 1 = 0$$

$$\operatorname{sen}2x + \cos 2x = 0 \Rightarrow \sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{4} - 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

Questão – 12.42

Solução:

$$\text{sen}^2 2x + \text{sen}^2 x = \frac{3}{2} \Rightarrow (2\text{sen}x \cdot \cos x)^2 + \text{sen}^2 x = \frac{3}{2}$$

$$\left(2\text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x\right) + \text{sen}^2 x = \frac{3}{2} \Rightarrow \left(2\text{sen}^2 x \cdot \left(1 - \text{sen}^2 x\right)\right) + \text{sen}^2 x = \frac{3}{2}$$

$$-8\text{sen}^4 x + 10\text{sen}^2 x - 3 = 0$$

Temos que: $\text{sen}^2 x = \frac{3}{4}$ ou $\text{sen}^2 x = \frac{1}{4}$

Assim:

$$\text{sen}^2 x = \frac{3}{4} \Rightarrow \text{sen}x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{sen}^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{sen}x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

Questão – 12.43

Solução:

$$\left(\text{sen}^2 x + \cos^2 x\right) = 1 \Rightarrow \left(\text{sen}^2 x + \cos^2 x\right)^2 = 1$$

$$\text{sen}^4 x + \cos^4 x + 2\text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x = 1 \Rightarrow 4\text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x = 1$$

$$(\text{sen}2x)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}2x = \pm 1 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$$

Questão – 12.44

Solução:

$$\text{tg}x - \text{cotg}x = \frac{4}{3} \cdot \text{sen}2x \Rightarrow \frac{\text{sen}x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\text{sen}x} = \frac{4}{3} \cdot 2\text{sen}x \cdot \cos x$$

$$\frac{\text{sen}^2 x - \cos^2 x}{\text{sen}x \cdot \cos x} = \frac{8 \cdot \text{sen}x \cdot \cos x}{3} \Rightarrow$$

$$3 \cdot \left(\text{sen}^2 x - \cos^2 x\right) =$$

$$= 8 \cdot \text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x$$

$$3\cdot\left(1-2\cos^2 x\right)=8\cdot\left(1-\cos^2 x\right)\cdot\left(\cos^2 x\right)$$

$$3-6\cdot\cos^2 x=8\cos^2 x-8\cos^4 x\Rightarrow 8\cdot\cos^4 x-14\cdot\left(\cos^2 x\right)+3=0$$

$$\cos^2 x=\frac{14\pm 10}{16}\Rightarrow\cos^2 x=\frac{7\pm 5}{8}\Rightarrow\cos^2 x=\frac{1}{4}\Rightarrow\cos x=\pm\frac{1}{2}$$

$$x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Questão – 12.45

Solução:

$$\operatorname{tg}2x+\cot gx=8\cos^2 x\ \Rightarrow\ \frac{\operatorname{sen}2x}{\cos 2x}+\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}=8\cos^2 x$$

$$\frac{\operatorname{sen}2x\cdot\operatorname{sen}x+\cos x\cdot\cos 2x}{\operatorname{sen}x\cdot\cos 2x}=8\cos^2 x\ \Rightarrow\ \frac{\cos x}{\operatorname{sen}x\cdot\cos 2x}=8\cos^2 x$$

$$\cos x=8\cos^2 x\cdot\operatorname{sen}x\cdot\cos 2x\ \Rightarrow\ \cos x\cdot\left(8\operatorname{sen}x\cdot\cos x\cdot\cos 2x-1\right)=0$$

$$\cos x\cdot\left(4\cdot\left(2\cdot\operatorname{sen}x\cdot\cos x\right)\cdot\cos 2x-1\right)=0$$

$$\cos x\cdot\left(4\cdot\left(\operatorname{sen}2x\right)\cdot\cos 2x-1\right)=0\ \Rightarrow\ \cos x\cdot\left(2\cdot\operatorname{sen}4x-1\right)=0$$

Agora, temos 2 casos a analisar

Caso 1: $\cos x=0$

$$x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$$

Caso 2: $\operatorname{sen}4x=\frac{1}{2}$

$$4x=\frac{\pi}{6}+2k\pi\Rightarrow x=\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$$

$$4x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi\Rightarrow x=\frac{5\pi}{24}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$$

Questão – 12.46

Solução:

$$\text{sen}3x + \cos 3x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sqrt{2}\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{3\pi \pm 4\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$$

Questão – 12.47 – Este problema é idêntico ao exercício resolvido 12.13

Questão – 12.48

Solução:

$$\sqrt{3}\cdot\text{sen}2x + \cos 2x = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\text{sen}2x + \frac{1}{2}\cdot\text{sen}2x = \frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{6}\cdot\text{sen}2x + \text{sen}\frac{\pi}{6}\cdot\cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{sen}\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right) = \frac{1}{2}$$

Agora temos 2 casos a analisar:

Caso 1: $\frac{\pi}{6} + 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$$\frac{\pi}{6} + 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Caso 2: $\frac{\pi}{6} + 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

$$\frac{\pi}{6} + 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Questão – 12.49

Solução:

$$1 - \cos 4x + \operatorname{sen} 4x = 0 \Rightarrow \cos 4x - \operatorname{sen} 4x = 1$$

$$\cos 4x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) = 1 \Rightarrow -2 \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} \cdot \cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Agora, temos 2 casos a analisar:

Caso 1: $4x - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$

$$4x - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

Caso 2: $4x - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$

$$4x - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

Questão – 12.50

Solução:

$$\sqrt{3}\cos^2 x + 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x - \sqrt{3}\operatorname{sen}^2 x = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{3} \cdot \left(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x\right) + \operatorname{sen} 2x = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{3} \cdot (\cos 2x) + \operatorname{sen} 2x = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (\cos 2x) + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{sen} 2x = \sqrt{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{6} \cdot (\cos 2x) + \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \cdot \operatorname{sen} 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2x - \frac{\pi}{6} = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$2x = \frac{4\pi \pm 6\pi}{24} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2\pi \pm 3\pi}{24} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Questão – 12.51

Solução:

$$\text{sen}^2x + 2\text{sen}x \cdot \cos x - 2\cos^2 x = \frac{1}{2}$$

Dividindo tudo por $\cos^2 x$, temos que:

$$\text{sen}^2x + 2\text{sen}x \cdot \cos x - 2 \cdot \cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{tg}^2x + 2\text{tg}x - 2 = \frac{1}{2} \cdot \sec^2 x$$

$$\text{tg}^2x + 2\text{tg}x - 2 = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \text{tg}^2x\right) \Rightarrow \text{tg}^2x + 4\text{tg}x - 5 = 0$$

Temos que: $\text{tg}\, x = -5$ ou $\text{tg}\, x = 1$

$$\text{tg}x = -5 \Rightarrow x = \text{arctg}(-5) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{tg}x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Questão – 12.52

Solução:

$$z = \text{sen}x + \cos x \Rightarrow z^2 = \text{sen}^2x + 2\text{sen}x \cdot \cos x + \cos^2 x \Rightarrow \text{sen}x \cdot \cos x = \frac{z^2 - 1}{2}$$

$$\left(\frac{z^2 - 1}{2}\right) - \sqrt{2}z + 1 = 0 \Rightarrow z^2 - 2\sqrt{2}z + 1 = 0$$

Temos que: $z = \sqrt{2} + 1$ ou $z = \sqrt{2} - 1$

Note que $\sqrt{2} + 1 > 2$ e $\text{sen}\, x + \cos x < 2$, logo a igualdade nunca é valida

Assim :

$$z = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow \text{sen}x + \cos x = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow \sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{2} - 1$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \pm\arccos 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Questão – 12.53

Solução:

$$z = \operatorname{sen}x + \cos x \Rightarrow z^2 = \operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen}x \cdot \cos x + \cos^2 x$$

$$\operatorname{sen}x \cdot \cos x = \frac{z^2 - 1}{2}$$

$$4 \cdot \left(\frac{z^2 - 1}{2}\right) - 2\sqrt{2}z + 3 = 0 \Rightarrow 2z^2 - 2\sqrt{2}z + 1 = 0$$

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}x + \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4} - x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Questão – 12.54

Solução:

$$\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2 \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos x \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = 2$$

$$\operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 2\cos x \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\right) + \cos\left(\pi - \left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4} - 2x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=\frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi}{2}-2x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi\ \Rightarrow\ \frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi=2x\ \Rightarrow\ \frac{3\pi\pm2\pi}{6}=2x$$

$$\Rightarrow x=\frac{3\pi\pm2\pi}{12}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Questão – 12.55

Solução:

$\arcsen x=\alpha\Rightarrow\operatorname{sen}\alpha=x$

$\arcsen\left(x\sqrt{3}\right)=\beta\Rightarrow\operatorname{sen}\beta=x\sqrt{3}$

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ \beta=\frac{\pi}{2}-\alpha\ \Rightarrow\ \operatorname{sen}\beta=\cos\alpha\ \Rightarrow\ x^2+\left(x\sqrt{3}\right)^2=1\ \Rightarrow\ x=\pm\frac{1}{2}$$

Note que:	Portanto:
$x=\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{6}$ $x\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\beta=\frac{\pi}{3}\Rightarrow\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$	$x=\frac{1}{2}$ é solução.

Observe que:	Portanto:
$x=-\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha=-\frac{\pi}{6}$ $x\sqrt{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\beta=-\frac{\pi}{3}\Rightarrow\alpha+\beta=-\frac{\pi}{2}$	$x=-\frac{1}{2}$ não é solução:.

Assim temos que, $x=\frac{1}{2}$ é a única solução da equação.

Questão – 12.56

Solução:

$\arccos x = \alpha \Rightarrow \cos\alpha = x \Rightarrow \text{sen}\alpha = \pm\sqrt{1-x^2}$

Como $0 \le \alpha \le \pi \Rightarrow \text{sen}\alpha = \sqrt{1-x^2}$

$\arccos 2x = \beta \Rightarrow \cos\beta = 2x \Rightarrow \text{sen}\beta = \pm\sqrt{1-4x^2}$

Como $0 \le \alpha \le \pi \Rightarrow \text{sen}\alpha = \sqrt{1-4x^2}$

$\alpha + \beta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos(\alpha+\beta) = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\alpha \cdot \cos\beta - \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta =$

$= (2x)\cdot x - \left(\sqrt{1-x^2}\right)\cdot\left(\sqrt{1-4x^2}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x^2 - \frac{1}{2} = \left(\sqrt{1-x^2}\right)\cdot\left(\sqrt{1-4x^2}\right)$

$\left(2x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 = \left[\left(\sqrt{1-x^2}\right)\cdot\left(\sqrt{1-4x^2}\right)\right]^2 \Rightarrow 12x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$

Note que:	**Portanto:**
$x = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$ $2x = 1 \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$	$x = \frac{1}{2}$ é solução.

Observe que	**Portanto:**
$x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{3}$ $2x = -1 \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = -\frac{\pi}{3}$	$x = -\frac{1}{2}$ não é solução:.

Assim, temos que $x = \frac{1}{2}$ é a única solução da equação.

Questão – 12.57

Solução:

$\text{arcsen}\sqrt{x} = \alpha \Rightarrow \text{sen}\alpha = \sqrt{x} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{1-x}$

Como, $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1-x}$

$\arccos\sqrt{x} = \beta \Rightarrow \text{sen}\beta = \sqrt{x} \Rightarrow \text{sen}\beta = \pm\sqrt{1-x}$

Como $0 \le \beta \le \pi \Rightarrow \text{sen}\beta = \sqrt{1-x}$

Assim, temos que:

$\text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \text{sen}\beta \cdot \cos\alpha = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} + \left(\sqrt{1-x}\right) \cdot \left(\sqrt{1-x}\right) = 1$

$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow S = \varnothing$

Questão – 12.58

Solução:

$\text{arctg}x = \alpha \Rightarrow \text{tg}\alpha = x$
$\text{arctg}3x = \beta \Rightarrow \text{tg}\beta = 3x$

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha \Rightarrow \text{tg}\beta = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{\cos(\alpha)}{\text{sen}(\alpha)} = \frac{1}{\text{tg}(\alpha)}$$

$$3x = \frac{1}{x} \Rightarrow 3x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Note que:	Portanto:
$x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$ $3x = \sqrt{3} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$	$x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ é solução.

Observe que:	**Portanto:**
$x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{6}$	$x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ não é solução.
$3x = -\sqrt{3} \Rightarrow \beta = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow \alpha + \beta = -\frac{\pi}{2}$	

Assim temos que $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ é a única solução da equação.

Questão – 12.59

Solução:

Seja:

$\text{arcsen}x = \alpha \Rightarrow \text{sen}\alpha = x$
$\text{arccos}\, x = \beta \Rightarrow \cos\beta = x$
$\text{arctg}x = \gamma \Rightarrow \text{tg}\gamma = x$
$\text{arctg}2 = \phi \Rightarrow \text{tg} = 2$
$\text{arctg}4 = \varphi \Rightarrow \text{tg}\varphi = 4$

Já sabemos que $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

$\text{arcsen}x + \text{arccos}\, x + \text{arctg}x = \text{arctg}2 + \text{arctg}4 \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = \phi + \varphi$

$$\text{tg}(\alpha + \beta + \gamma) = \text{tg}(\phi + \varphi) \Rightarrow \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right) = \text{tg}(\phi + \varphi)$$

$$-\text{tg}\left(-\frac{\pi}{2} + \gamma\right) = \text{tg}(\phi + \varphi) \Rightarrow -\frac{1}{\text{tg}(\gamma)} = \frac{2+4}{1-2.4} \Rightarrow \text{tg}\gamma = \frac{7}{6} \Rightarrow x = \frac{7}{6}$$

Como $-1 \leq \text{sen}x \leq 1$ temos que $x = \frac{7}{6}$ não pode ser solução.

Assim, temos que: $S = \varnothing$

Questão – 12.60

Solução:

$$\arccos\sqrt{1-x^2} = \beta \Rightarrow \cos\beta = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow 0 \le \beta \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\pi \le -2\beta \le 0$$

$$\operatorname{arcsen}(1-x) = \alpha \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{3\pi}{2} \le \alpha - 2\beta \le \frac{\pi}{2}$$

Note que:

$$\alpha - 2\beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ e } \beta = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow S = \{0\}$$

Capitulo 13

Inequações Trigonométricas

Capítulo 13
Inequações Trigonométricas

Parte 1 – Exercícios Propostos

Questão – 13.6

Solução:

$$2\text{sen}^2 x < \cos 2x \Rightarrow 2\left(1-\cos^2 x\right) < 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow 3 < 4\cos^2 x$$

$$\cos^2 x > \frac{3}{4}$$

Temos que: $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Assim: $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, onde k é inteiro.

Questão – 13.7

Solução:

$$\text{tg}x > \text{sen}2x \Leftrightarrow \text{tg}x - \text{sen}2x > 0 \Leftrightarrow \frac{\text{sen}x}{\cos x} - \frac{2\text{sen}x \cdot \cos^2 x}{\cos x} > 0$$

$$\frac{\text{sen}x}{\cos x} \cdot \left(1-2\cos^2 x\right) > 0 \Leftrightarrow \text{tg}x \cdot (-\cos 2x) > 0 \Leftrightarrow \text{tg}x \cdot \cos 2x < 0$$

Agora temos 2 casos a analisar:

Caso 1: tg x > 0 e cos 2x < 0

Neste caso, temos que:

$$\text{tg}x > 0 \Rightarrow 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } -\frac{\pi}{2} < x < -\pi$$

$$\cos 2x < 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} < 2x < \frac{3\pi}{2} \text{ ou } -\frac{\pi}{2} < 2x < -\frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4} \text{ ou}$$

$$-\frac{\pi}{4} < x < -\frac{3\pi}{4}$$

Fazendo a interseção temos que a solução deste caso é: $-\frac{3\pi}{4} < x < -\frac{\pi}{2}$

ou $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$

Caso 2: $tg\, x < 0$ e $\cos 2x > 0$

Neste caso, temos que:

$tgx < 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} < x < \pi$ ou $0 < x < -\frac{\pi}{2}$

$\cos 2x > 0 \Rightarrow 0 < 2x < \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2} < 2x < 2\pi$ ou $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < x < \frac{\pi}{4}$

ou $\frac{3\pi}{4} < x < \pi$ ou $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$

Fazendo a interseção temos que a solução deste caso é: $\frac{3\pi}{4} < x < \pi$ ou

$-\frac{\pi}{4} < x < 0$

Questão – 13.8

Solução:

$sen^2 x \leq 1 - \cos x \Rightarrow 1 - \cos^2 x \leq 1 - \cos x \Rightarrow 0 \leq \cos^2 x - \cos x$

$\cos x \cdot ((\cos x) - 1) \geq 0$

Daí temos 2 casos a analisar

Caso 1: $\cos x \geq 0$ e $(\cos x) - 1 \geq 0$ $(\cos x) - 1 \geq 0 \Rightarrow \cos x \geq 1 \Rightarrow \cos x = 1$

Assim, temos que: $x = 0$ ou $x = 2\pi$

Caso 2: $\cos x \leq 0$ e $(\cos x) - 1 \leq 0$ $(\cos x) - 1 \leq 0 \Rightarrow \cos x \leq 1$

Como essa ultima igualdade é sempre verdade, temos que $\cos x \leq 0$ é a única desigualdade a ser satisfeita.

Assim temos que $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$

Questão – 13.9

Solução:

$5\text{sen}^2x + \text{sen}^2 2x > 4\cos 2x$

$5\cdot\left(1-\cos^2 x\right)+\left(2\cdot \text{sen}x\cdot\cos x\right)^2 > 4\cdot\left(2\cos^2 x-1\right)$

$5\cdot\left(1-\cos^2 x\right)+4\cdot\cos^2 x\cdot\left(1-\cos^2 x\right) > 4\cdot\left(2\cos^2 x-1\right)$

$9-9\cos^2 x-4\cos^4 x > 0$

Fazendo $y = \cos^2 x$, temos que:

$$9-9y^2-4y^4 > 0 \;\Rightarrow\; 0 < \cos^2 x < \frac{3}{4} \;\Rightarrow\; \frac{\pi}{6}+2k\pi < x < \frac{5\pi}{6}+2k\pi$$

Questão – 13.10

Solução:

$$\text{sen}2x+\cos 2x \le -\sqrt{2} \;\Leftrightarrow\; \text{sen}2x+\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-2x\right) \le -\sqrt{2}$$

$$2\text{sen}\frac{\pi}{4}\cdot\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right) \le -\sqrt{2} \;\Leftrightarrow\; \sqrt{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right) \le -\sqrt{2}$$

$$\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right) \le -1 \;\Rightarrow\; \cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right) = -1 \;\Rightarrow\; 2x-\frac{\pi}{4} = \pi+2k\pi$$

$$2x = \pi+\frac{\pi}{4}+2k\pi \;\Rightarrow\; 2x = \frac{5\pi}{4}+2k\pi \;\Rightarrow\; x = \frac{5\pi}{8}+k\pi$$

Questão – 13.11 – Essa questão segue o mesmo raciocínio do exercício anterior

Questão – 13.12

Solução:

$$\text{sen}^3x > \cos^3x \Rightarrow \text{sen}^3x - \cos^3x > 0$$

$$(\text{sen}x - \cos x)\cdot\left(\text{sen}^2x + \text{sen}x\cdot\cos x + \cos^2 x\right) > 0$$

$$(\text{sen}x - \cos x)\cdot\left(1 + \frac{\text{sen}2x}{2}\right) > 0$$

Note que:

$$-1 \le \text{sen}2x \le 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \le \frac{\text{sen}2x}{2} \le \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \le 1 + \frac{\text{sen}2x}{2} \le \frac{3}{2}$$

Logo devemos ter:

$$(\text{sen}x - \cos x) > 0 \Rightarrow 2\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0 \Rightarrow \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0$$

$$0 < x - \frac{\pi}{4} < \pi \Rightarrow \frac{\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$$

Só que, no caso do nosso problema, o conjunto universo é $U = [-\pi, \pi]$, daí a solução é: $S = \left\{x \in \Re \mid \frac{\pi}{4} < x < \pi\right\} \cup \left\{x \in \Re \mid -\pi < x < -\frac{3\pi}{4}\right\}$

Parte 2 – Exercícios Suplementares

Questão – IV.1

Solução:

$$\text{sen}2x + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \text{sen}2x + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right) = \text{sen}2x + \text{sen}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) =$$

$$= 2\text{sen}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = 0$$

Daí, temos 2 casos para analisar.

Caso 1: $\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=0$

Neste caso, temos que:

$$\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}=k\pi \Rightarrow \frac{x}{2}=-\frac{\pi}{6}+k\pi \Rightarrow x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

Caso 2: $\cos\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=0$

Neste caso, temos que:

$$\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi \Rightarrow \frac{3x}{2}=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}+k\pi \Rightarrow \frac{3x}{2}=\frac{4\pi}{6}+k\pi \Rightarrow x=\frac{4\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}$$

Questão – IV.2

Solução:

Faça $y=\frac{x}{2}+\frac{\pi}{5}$

Temos que:

$$\cot g3y+\cot gy=0 \Rightarrow \frac{\cos 3y}{\operatorname{sen}3y}+\frac{\cos y}{\operatorname{sen}y}=0 \Rightarrow \frac{\cos 3y\cdot \operatorname{sen}y+\cos y\cdot \operatorname{sen}3y}{\operatorname{sen}y\cdot \operatorname{sen}3y}=0$$

$$\frac{\operatorname{sen}4y}{\operatorname{sen}y\cdot \operatorname{sen}3y}=0 \Rightarrow \operatorname{sen}4y=0 \Rightarrow 4y=k\pi \Rightarrow y=\frac{k\pi}{4} \Rightarrow \frac{x}{2}+\frac{\pi}{5}=\frac{k\pi}{4}$$

$$\frac{x}{2}=-\frac{\pi}{5}+\frac{k\pi}{4} \Rightarrow x=-\frac{2\pi}{5}+\frac{k\pi}{2}$$

Note também que:

$$\frac{x}{2}+\frac{\pi}{5}\neq k\pi \Rightarrow \frac{x}{2}\neq -\frac{\pi}{5}+k\pi \Rightarrow x\neq -\frac{2\pi}{5}+2k\pi$$

Questão – IV.3

Solução:

$$\cos\left(4x+\frac{3\pi}{2}\right)+\cos 2x+\cos\left(3x+\frac{3\pi}{4}\right)=0$$

$$2\cos\left(3x+\frac{3\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)+\cos\left(3x+\frac{3\pi}{4}\right)=0$$

$$\cos\left(3x+\frac{3\pi}{4}\right)\cdot\left(2\cos\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)+1\right)=0$$

Daí, temos 2 casos a analisar:

Caso 1: $\cos\left(3x+\frac{3\pi}{4}\right)=0$

Neste caso, temos que:

$$3x+\frac{3\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi \Rightarrow 3x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \Rightarrow x=-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3}$$

Caso 2: $2\cos\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)+1=0$

Neste caso, temos que:

$$2\cos\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)-1=0 \Rightarrow \cos\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2} \Rightarrow x-\frac{3\pi}{4}=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi$$

$$x=\frac{3\pi}{4}\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi$$

Questão – IV.4

Solução:

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2}-\operatorname{sen}\frac{3x}{2}+\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{5\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=0$$

$$2\operatorname{sen}\left(-\frac{x}{2}\right)\cdot\cos(x)+\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\pi=0 \Rightarrow 2\operatorname{sen}\left(-\frac{x}{2}\right)\cdot\cos(x)=0$$

Agora temos 2 casos a analisar

Caso 1: $\operatorname{sen}\left(-\frac{x}{2}\right) = 0$

$-\frac{x}{2} = k\pi \Rightarrow x = -2k\pi$

Note que $-2k\pi$ é côngruo a $2k\pi$, logo $x = 2k\pi$

Caso 2: $\cos x = 0$

$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Questão – IV.5

Solução:

$$\cos 2x + tg^2 x = 1 \Rightarrow \frac{1 - tg^2 x + tg^4 x + tg^2 x}{1 + tg^2 x} = 1 \Rightarrow \frac{1 + tg^4 x}{1 + tg^2 x} = 1$$

$$1 + tg^4 x = 1 + tg^2 x \Rightarrow tg^4 x = tg^2 x \Rightarrow tg^2 x \cdot \left(tg^2 x - 1\right) = 0$$

Temos 2 casos a analisar:

Caso 1: $tg^2 x = 0$

Neste caso, temos que:

$tg^2 x = 0 \Rightarrow tgx = 0 \Rightarrow x = k\pi$

Caso 2: $tg^2 x = 1$

Neste caso, temos que:

$tg^2 x = 1 \Rightarrow tgx = \pm 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$

Questão – IV.6

Solução:

$$2\sqrt{2}\text{sen}^3x = \text{sen}2x \Leftrightarrow 2\sqrt{2}\text{sen}^3x = 2\text{sen}x\cdot\cos x$$

$$2\sqrt{2}\text{sen}^3x - 2\text{sen}x\cdot\cos x = 0 \Leftrightarrow 2\text{sen}x\cdot\left(\sqrt{2}\text{sen}^2x - \cos x\right) = 0$$

Temos 2 casos a analisar:

Caso 1: $\text{sen}x = 0$

Neste caso, temos que:

$$\text{sen}x = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

Caso 2: $\sqrt{2}\text{sen}^2x - \cos x = 0$

Neste caso, temos que:

$$\sqrt{2}\text{sen}^2x - \cos x = 0 \Rightarrow \sqrt{2}\left(1-\cos^2 x\right) - \cos x = 0$$

$$-\sqrt{2}\cos^2 x - \cos x + \sqrt{2} = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1\pm 3}{-2\sqrt{2}}$$

Temos que: $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\cos x = -\sqrt{2}$.

Portanto, $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, logo $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$

Questão – IV.7

Solução:

$$2\text{sen}^2 3x + \text{sen}^2 6x = 2 \Rightarrow 2\cdot\left(1-\cos^2 3x\right) + \left(1-\cos^2 6x\right) = 2$$

$$2 - 2\cos^2 3x + \left(1-\cos^2 6x\right) = 2 \Rightarrow -2\cos^2 3x + \left(1-\cos^2 6x\right) = 0$$

$$2\cos^2 3x - 1 + \cos^2 6x = 0 \Rightarrow \cos 6x + \cos^2 6x = 0$$

$$\cos 6x\cdot(1+\cos 6x) = 0$$

Temos 2 casos a analisar:

Caso 1: $\cos 6x = 0$

Neste caso, temos que:

$$\cos 6x = 0 \Rightarrow 6x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6}$$

Caso 2: $\cos 6x = -1$

Neste caso, temos que:

$$\cos 6x = -1 \Rightarrow 6x = \pi + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$$

Questão – IV.8

Solução:

Faça tg x = t, assim, temos que:

$$t + \frac{2t}{1-t^2} + \frac{3t-t^3}{1-3t^2} = 0 \Rightarrow \frac{t\cdot\left(1-t^2\right)\cdot\left(1-3t^2\right) + 2t\cdot\left(1-3t^2\right) + \left(3t-t^3\right)\cdot\left(1-t^2\right)}{\left(1-t^2\right)\cdot\left(1-3t^2\right)} = 0$$

$$4t^5 - 14t^3 + 6t = 0 \Rightarrow 2t.(2t^4 - 7t^2 + 3) = 0$$

Agora temos 2 casos a analisar:

Caso1: $2t = 0$

Neste caso, temos que: $t = 0$

Assim, temos que: $x = k\pi$

Caso2: $2t^4 - 7t^2 + 3 = 0$

$2t^4 - 7t^2 + 3 = 0$

Fazendo: $t^2 = y$

$2y^2 - 7y + 3 = 0$

Temos que: $y = 3$ ou $y = \frac{1}{2}$

Logo, $tg\,x = \pm\sqrt{3}$ ou $tg^2x = \frac{1}{2}$

$tgx = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi$

$tgx = -\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$

$tg^2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 + tg^2x = \frac{3}{2} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{2}{3} \Rightarrow \cos x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

Assim, temos que: $x = \text{arc cos } \pm\sqrt{\frac{2}{3}} + 2k\pi$

Questão – IV.9

Solução:

$sen^2x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \left(sen^2x + \cos^2 x\right)^2 = 1$

$sen^4x + \cos^4 x + 2sen^2 \cdot \cos^2 x = 1 \Rightarrow 2sen^2 \cdot \cos^2 x = \frac{1}{8}$

$sen^2 \cdot \cos^2 x = \frac{1}{16} \Rightarrow sen x \cdot \cos x = \pm\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{sen2x}{2} = \pm\frac{1}{4}$

$sen2x = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$

Questão – IV.10

Solução:

$(sen2x)^2 - 6sen^2x + 2 = 0 \Rightarrow (2sen x \cdot \cos x)^2 - 6sen^2x + 2 = 0$

$2sen^2x \cdot \cos^2 x - 6sen^2x + 2 = 0$

$2sen^2x \cdot (1 - sen^2x) - 6sen^2x + 2 = 0$

$2sen^4x + sen^2x - 1 = 0$

Fazendo. $\text{sen}^2 x = y$

$2y^2 + y - 1 = 0$

Temos que: $y = -1$ ou $y = \frac{1}{2}$

$$\text{sen}^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$$

Questão – IV.11

Solução:

$$2\text{tg}3x = \sqrt{2}\cdot\sec 3x - 2 \Rightarrow 2\cdot\frac{\text{sen}3x}{\cos 3x} = \sqrt{2}\cdot\frac{1}{\cos 3x} - 2\cdot\frac{\cos 3x}{\cos 3x}$$

$$\text{sen}3x + \cos 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sqrt{2}\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$3x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} \pm \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$$

Questão – IV.12

Solução:

$$4 - 2\sqrt{2}\cdot(\sec x + \text{cossec}\, x) + 3\cdot\sec x\cdot\text{cossec}\, x = 0$$

$$4 - 2\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\text{sen}x}\right) + 3\cdot\left(\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1}{\text{sen}x}\right) = 0$$

$$4\text{sen}x\cdot\cos x - 2\sqrt{2}\cdot(\text{sen}x + \cos x) + 3 = 0$$

Agora faça $k = \text{sen}\, x + \cos x$

Temos que:

$$\text{sen}x + \cos x = k \Rightarrow \text{sen}^2 x + \cos^2 x + 2\text{sen}x\cdot\cos x = k^2$$

$$\text{sen}x\cdot\cos x = \frac{k^2 - 1}{2}$$

Assim, temos que:

$$4\text{sen}x\cdot\cos x-2\sqrt{2}(\text{sen}x+\cos x)+3=0 \Rightarrow 4\left(\frac{k^2-1}{2}\right)-2\sqrt{2}k+3=0$$

$$2k^2-2\sqrt{2}k+3=0 \Rightarrow k=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \text{sen}x+\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sqrt{2}\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2} \Rightarrow x-\frac{\pi}{4}=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi \Rightarrow x=\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

Questão – IV.13

Solução:

$\text{arcsen}2x=\alpha \Rightarrow \text{sen}\alpha=2x$

$\text{arctg}3x=\beta \Rightarrow \text{tg}\beta=3x$

Temos que $\alpha=\beta$, logo

$$\text{tg}\alpha=3x \Rightarrow \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}=3x \Rightarrow \frac{2x}{\cos\alpha}=3x \Rightarrow \cos\alpha=\frac{2}{3} \Rightarrow \text{sen}^2\alpha=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$$

$$\text{sen}\alpha=\pm\frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow 2x=\pm\frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{5}}{6}$$

É fácil ver que $x=0$ também satisfaz a equação acima.

Assim, temos que: $x=\left\{0,\frac{\sqrt{5}}{6},-\frac{\sqrt{5}}{6}\right\}$

Questão – IV.14

Solução:

$$\text{arcsen}x=\alpha \Rightarrow \text{sen}\alpha=x \Rightarrow \cos^2\alpha=1-x^2 \Rightarrow \cos\alpha=\pm\sqrt{1-x^2}$$

$\text{arcsen}2x=\beta \Rightarrow \text{sen}\beta=2x$

$2\alpha+\beta=\pi \Rightarrow \beta=\pi-2\alpha \Rightarrow \text{sen}\beta=\text{sen}2\alpha \Rightarrow \text{sen}\beta=2\text{sen}\alpha\cdot\cos\alpha$

$$2x=2x\cdot\left(\pm\sqrt{1-x^2}\right) \Rightarrow x=0 \Rightarrow \alpha=0 \Rightarrow \beta=0$$

Note que estes valores não satisfazem a equação original, logo $S=\varnothing$.

Questão – IV.15 – Veja a resposta no final do livro-texto

Questão – IV.16

Solução:

$\text{sen}x \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{7\pi}{6}$ ou $\frac{7\pi}{6} \leq x \leq 2\pi$

$\cos x < -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3}$

Fazendo a interseção, temos que: $\frac{2\pi}{3} < x \leq \frac{7\pi}{6}$

Questão – IV.17

Solução:

$\cos 2x + \cos x \geq 0 \Rightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 \geq 0$

Assim: $\cos x \leq -1$ ou $\frac{1}{2} \leq \cos x \leq 1$

Logo, temos que: $x = \pm\pi$ ou $-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$

Questão – IV.18 – Este problema é idêntico ao 13.7

Questão – IV.19

Solução:

$\text{sen}2x > \cos x \Leftrightarrow 2\text{sen}x \cdot \cos x > \cos x \Leftrightarrow (2\text{sen}x - 1) \cdot \cos x > 0$

Agora, temos 2 casos a analisar.

Caso1: $\cos x > 0$ e $\text{sen}\, x > \frac{1}{2}$

$\cos x > 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

$\text{sen}x > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$

Fazendo a interseção temos que:

$\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$

Caso2: $\cos x < 0$ e $\text{sen}\, x < \frac{1}{2}$

$\cos x < 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$

$\text{sen}x < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{5\pi}{6} < x < \frac{11\pi}{6}$

Fazendo a interseção temos que : $\frac{5\pi}{6} < x < \frac{3\pi}{2}$

Questão – IV.20

Solução:

$1 - 2\text{sen}^2 x = \cos 2x$

Daí teremos que $tgx \cdot \cos 2x > 0$

A partir do exercício 13.7 é fácil chegarmos a solução desta desigualdade.

Capítulo 14

Resolução de Triângulos

Capítulo 14
Resolução de Triângulos

Questão – 14.14

Solução:

a) $18^2 + 20^2 = 324 + 400 = 724 < 30^2 = 900$

Logo, o triângulo é obtusângulo.

b) $10^2 + 34^2 = 100 + 1156 = 1256 < 38^2 = 1444$

Logo, o triângulo é obtusângulo.

c) $8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289 = 17^2$

Logo, o triângulo é retângulo.

d) $8^2 + 12^2 = 64 + 144 = 208 > 14^2 = 196$

Logo, o triângulo é acutângulo.

e) $7^2 + 10^2 = 49 + 100 = 149 < 13^2 = 169$

Logo, o triângulo é obtusângulo.

Questão – 14.15

Solução:

Observe que, $m^2 + n^2$ é o maior lado do triângulo, pois:

$(m-n)^2 \geq 0 \Rightarrow m^2 + n^2 \geq 2mn$ e $m^2 + n^2 \geq m^2 - n^2$

Temos que::

$$\left(m^2 - n^2\right)^2 + (2mn)^2 = m^4 + n^4 - 2m^2n^2 + 4m^2n^2 = m^4 + n^4 + 2m^2n^2 = \left(m^2 + n^2\right)^2$$

Logo o triângulo é retângulo.

Questão – 14.16

Solução:

a) Usando a lei dos cossenos, temos que:

$$\left(\sqrt{6}\right)^2 = \left(\sqrt{3}+1\right)^2 + (2)^2 - 2\cdot 2\left(\sqrt{3}+1\right)\cdot \cos B$$

$$2\cdot 2\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)\cdot \cos B = 2\cdot\left(\sqrt{3}+1\right) \Rightarrow \cos B = \frac{1}{2} \quad B = 60^\circ$$

Usando a lei dos senos, temos que:

$$\frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\text{sen}A} \Rightarrow \text{sen}A = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow A = 45^\circ$$

Logo $C = 75^\circ$

$$S = \frac{2\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{(\sqrt{3}+3)}{2}$$

b) $\text{sen}^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ = 1 \Rightarrow \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Usando a lei dos cossenos temos que

$$(1)^2 = \left(\sqrt{3}+1\right)^2 + (c)^2 - 2c\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$c^2 - \left(2\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)c + \left(3+2\sqrt{3}\right) = 0 \Rightarrow c = \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}\pm\sqrt{2}}{2}$$

Temos que: $c = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$ ou $c = \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

A partir daí, temos os 3 lados. Assim, para calcular o resto, é só fazer como na letra **a**.

c) Este exercício se faz da mesma forma da letra **b**

d) $S = \frac{ab\,\text{sen}C}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \text{sen}C = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow C = 60^\circ$

A partir daí, temos 2 lados e um ângulo .Assim, para calcular o resto, é só fazer como na letra **b**.

e) Este problema é idêntico a letra **d**

Questão – 14.17

Solução:

Usando a formula de Heron, temos que:

$$S = \sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)} = \sqrt{35\cdot(10)\cdot(9)\cdot(16)} = 60\sqrt{14}$$

Questão – 14.18

Solução:

$$tg75^{\circ} = tg\left(45^{\circ} + 30^{\circ}\right) = \frac{tg45^{\circ} + tg30^{\circ}}{1 - tg45^{\circ}\cdot tg30^{\circ}} = 2 + \sqrt{3}$$

$$tg75^{o} = \frac{b}{c} \Rightarrow 2 + \sqrt{3} = \frac{b}{c} \Rightarrow 1 + \sqrt{3} = \frac{b}{c} - 1 \Rightarrow 1 + \sqrt{3} = \frac{b-c}{c}$$

$$1 + \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}-1}{c} \Rightarrow c = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow b = 1$$

Usando o teorema de Pitágoras, temos que:

$$b^2 + c^2 = a^2 \Rightarrow a = \sqrt{6} - \sqrt{2}$$

Note que $c = 15^{\circ}$

$$S = \frac{\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot 1}{2} = \frac{\left(2-\sqrt{3}\right)}{2}$$

Questão – 14.19

Solução:

Sejam os lados x, x–1, x+1

Usando a lei dos cossenos temos que

$$(x-1)^2 = x^2 + (x+1)^2 - 2(x)\cdot(x+1)\cdot\cos\alpha$$

$$2(x)\cdot(x+1)\cdot\cos\alpha = x\cdot(x+4) \Rightarrow \cos\alpha = \frac{x+4}{2\cdot(x+1)}$$

Usando a lei dos cossenos, temos que:

$$(x+1)^2 = x^2 + (x-1)^2 - 2\cdot(x)\cdot(x-1)\cdot\cos 2\alpha$$

$$2\cdot(x)\cdot(x-1)\cdot\cos 2\alpha = x\cdot(x-4) \Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{x-4}{2\cdot(x-1)}$$

Já sabemos que, $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, assim, temos que:

$$\frac{x-4}{2\cdot(x-1)} = 2\cdot\left(\frac{x+4}{2\cdot(x+1)}\right)^2 - 1 \Rightarrow \frac{x-4}{2\cdot(x-1)} + 1 = 2\cdot\left(\frac{x+4}{2\cdot(x+1)}\right)^2$$

$$\frac{3x-6}{2\cdot(x-1)} = 2\cdot\left(\frac{x+4}{2\cdot(x+1)}\right)^2 \Rightarrow \frac{3x-6}{(x-1)} = \frac{x^2+8x+16}{x^2+2x+1}$$

$$(3x-6)\cdot\left(x^2+2x+1\right) = (x-1)\cdot\left(x^2+8x+16\right)$$

$$2x^3 - 7x^2 - 17x + 10 = 0 \Rightarrow (x-5)\cdot\left(2x^2+3x-2\right) = 0$$

Assim, temos que: $x = 5$ ou $x = -2$ ou $x = \frac{1}{2}$

Claramente $x = -2$ e $x = \frac{1}{2}$ não são soluções, portanto, $x = 5$ é a única solução.

Assim, temos que os lados são: 4, 5 e 6.

Questão – 14.20

Solução:

Sejam **x** e **y** os catetos, **z** a hipotenusa e **S** a área.

$S = \frac{xy}{2} = \frac{xyz}{4R} \Rightarrow z = 2R$

Como $R = \sqrt{2}$, então a hipotenusa mede $2\sqrt{2}$.

Temos que $x + y = 2\sqrt{3}$ e $x^2 + y^2 = 8$

$x + y = 2\sqrt{3} \Rightarrow (x+y)^2 = 12 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy = 12 \Rightarrow xy = 2$

Agora sabemos que $xy = 2$ e $x + y = 2\sqrt{3}$

Resolvendo este sistema temos que $x = \sqrt{3}+1$ e $y = \sqrt{3}-1$

Agora, nós sabemos os 3 lados.

A partir daí, é só proceder como no problema 14.16 letra a.

Questão – 14.21

Dica:

Lembrando que a medida da mediana relativa à hipotenusa vale R, este problema se torna idêntico ao problema anterior.

Questão – 14.22

Solução:

Antes, vamos calcular alguns resultados que serão uteis nesta questão.

Usando a lei dos cossenos, temos que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B \Rightarrow \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ba \cdot \cos C \Rightarrow \cos C = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ba}$$

Usando a lei dos senos, temos que:

$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C} = 2R \Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{\text{sen}C}{\text{sen}B}$$

$$\frac{a}{\text{sen}A}=\frac{b}{\text{sen}B} \Rightarrow a(\text{sen}B)=b(\text{sen}A) \Rightarrow -a(\text{sen}B)+b(\text{sen}A)=0$$

Agora, vamos ao nosso problema:

a) $$\frac{b-a\cos C}{c-a\cos B}=\frac{b-a\cdot\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)}{c-a\cdot\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)}=\frac{b-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}\right)}{c-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right)}=$$

$$=\frac{\left(\frac{2b^2-a^2-b^2+c^2}{2b}\right)}{\left(\frac{2c^2-a^2-c^2+b^2}{2c}\right)}=\frac{\left(\frac{b^2-a^2+c^2}{2b}\right)}{\left(\frac{c^2-a^2+b^2}{2c}\right)}=\left(\frac{b^2-a^2+c^2}{2b}\right)\cdot\left(\frac{2c}{c^2-a^2+b^2}\right)=$$

$$=\frac{c}{b}=\frac{\text{sen}C}{\text{sen}B}$$

b) $$b(\cos C)+c(\cos B)=b\left(\frac{b^2+a^2-c^2}{2ba}\right)+c\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)=$$

$$=\left(\frac{b^2+a^2-c^2}{2a}\right)+\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)=\left(\frac{2a^2}{2a}\right)=a$$

c) $$(a+b)\cdot(1-\cos C)=(a+b)\cdot\left(1-\left(\frac{b^2+a^2-c^2}{2ab}\right)\right)=$$

$$=(a+b)\cdot\left(\frac{2ab-b^2-a^2+c^2}{2ab}\right)=\frac{ab^2+a^2b+ac^2+bc^2-a^3-b^3}{2ab}$$

$$c\cdot(\cos A+\cos B)=c\cdot\left(\frac{c^2+b^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}\right)=$$

$$=\frac{c^2+b^2-a^2}{2b}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2a}=\frac{ab^2+a^2b+ac^2+bc^2-a^3-b^3}{2ab}$$

Temos que:

$$(a+b)\cdot(1-\cos C)=c\cdot(\cos A+\cos B)=\frac{ab^2+a^2b+ac^2+bc^2-a^3-b^3}{2ab}$$

d) $a\cdot(\cos B-\operatorname{sen}B)+b\cdot(\cos A+\operatorname{sen}A)=$

$=a\cdot\cos B-a\cdot\operatorname{sen}B+b\cdot\cos A+b\cdot\operatorname{sen}A=a\cdot\cos B+b\cdot\cos A=$

$$=a\cdot\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)+b\cdot\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)=\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}+\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}=$$

$$=\frac{2c^2}{2c}=c$$

e) Antes de fazermos este problema, vamos provar 2 resultados:

Resultado 1:

$$A+B+C=180^{\circ}\Rightarrow A+B=180^{\circ}-C\Rightarrow \operatorname{sen}(A+B)=\operatorname{sen}\left(180^{\circ}-C\right)$$

$$\operatorname{sen}A\cdot\cos B+\operatorname{sen}B\cdot\cos A=\operatorname{sen}C$$

Resultado 2:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}A}=\frac{b}{\operatorname{sen}B}=2R\Rightarrow\frac{a.b}{\operatorname{sen}A.\operatorname{sen}B}=4R^2\Rightarrow\frac{a.b\operatorname{sen}C}{\operatorname{sen}A.\operatorname{sen}B}=4R^2\operatorname{sen}C$$

$$\frac{\operatorname{sen}C}{\operatorname{sen}A.\operatorname{sen}B}=\frac{4R^2\operatorname{sen}C}{ab}$$

Agora, vamos ao nosso problema:

$$2S\cdot(\operatorname{cot}gA+\operatorname{cot}gB)=2S\cdot\left(\frac{\cos A}{\operatorname{sen}A}+\frac{\cos B}{\operatorname{sen}B}\right)=2S\cdot\left(\frac{\cos A.\operatorname{sen}B+\cos B\operatorname{sen}A}{\operatorname{sen}A\cdot\operatorname{sen}B}\right)=$$

$$=2S\cdot\left(\frac{\operatorname{sen}C}{\operatorname{sen}A\cdot\operatorname{sen}B}\right)=2\cdot\left(\frac{abc}{4R}\right)\cdot\left(\frac{4R^2\operatorname{sen}C}{ab}\right)=2\cdot\left(\frac{abc}{4R}\right)\cdot\left(\frac{4R^2\operatorname{sen}C}{ab}\right)=$$

$$=c\cdot\left((2R\cdot\operatorname{sen}C)\right)=c\cdot c=c^2$$

$$\text{f) } a\cdot\cos A-b\cdot\cos B=a\cdot\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)-b\cdot\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)=$$

$$=\frac{b^4-a^4+a^2c^2-b^2c^2}{2abc}$$

Por outro lado, temos que:

$$\cos C\cdot(b\cdot\cos A - a\cdot\cos B) = \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)\cdot\left(b\cdot\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) - a\cdot\left(\frac{b^2+a^2-b^2}{2ab}\right)\right) =$$

$$= \frac{b^4 - a^4 + a^2c^2 - b^2c^2}{2abc}$$

Temos que:

$$a\cdot\cos A - b\cdot\cos B = \cos C\cdot(b\cdot\cos A - a\cdot\cos B) = \frac{b^4 - a^4 + a^2c^2 - b^2c^2}{2abc}$$

Questão – 14.23

Solução:

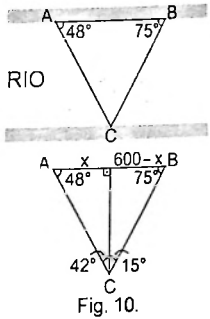


Fig. 10.

$$tg42^\circ = \frac{x}{d} \Rightarrow x = 0{,}9d$$

$$tg15^\circ = \frac{600 - x}{d} \Rightarrow 0{,}2679 = \frac{600 - x}{d}$$

$$0{,}2679d = 600 - x$$

$$0{,}2679d = 600 - 0{,}9d \Rightarrow 1{,}1679d =$$

$$= 600 \Rightarrow d = \frac{600}{1{,}1679} \approx 513$$

Questão – 14.24

Solução:

$$tg11^\circ = \frac{l}{x} \Rightarrow x = 0{,}19l$$

$$tg9^\circ = \frac{x}{15+l} \Rightarrow 0{,}16 = \frac{x}{l+15}$$

$$0{,}16\cdot(l+15) = x \Rightarrow 0{,}16l + 2{,}4 = x$$

$$0{,}16l + 2{,}4 = 0{,}19l$$

$$0{,}03l = 2{,}4 \Rightarrow l = 80m$$

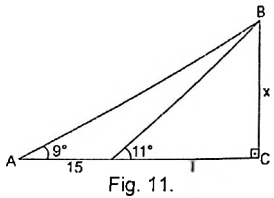


Fig. 11.

Questão – 14.25

Solução:

Usando a lei dos senos temos que

$$\frac{18}{\text{sen}6^{\circ}} = \frac{x}{\text{sen}30^{\circ}} \Rightarrow \frac{18}{0,1} = \frac{x}{0,5} \Rightarrow x = 90$$

Usando a lei dos cossenos, temos que:

$$y^2 = 40^2 + 90^2 - 2 \cdot 40 \cdot 90 \cdot 0,81 \Rightarrow y^2 = 3868 \Rightarrow y \approx 62$$

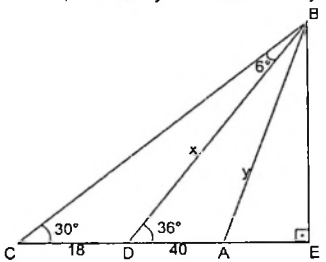


Fig. 12.

Questão – 14.26

Solução:

Note que
AO = R + h
OC = R
$\angle CAO = \alpha$

$\angle OCA = \dfrac{\pi}{2}$

Dai temos que:

$$\text{sen}\alpha = \frac{r}{r+h} \Rightarrow \text{cossec}\,\alpha = \frac{r+h}{r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \cdot \text{cossec}\,\alpha = r + h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R \cdot \left(\text{cossec}\,(\alpha) - 1\right) = h$$

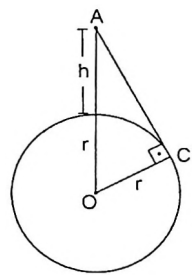


Fig. 13.

Nota: A solução deste problema nos foi enviada por Artur Catanhede (São Luis –MA).

Questão – 14.27

Solução:

Note que
AE = ED = h
EF = 1,4
AF = h – 1,4
DF = h + 1,4
BF = CE = x

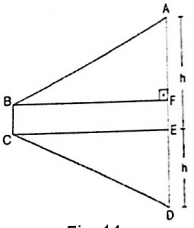


Fig. 14.

Temos que:

$$tg30^\circ = \frac{h-14}{x} \Rightarrow 0,58x = h - 1,4 \Rightarrow 0,58x + 1,4 = h$$

$$tg30,5^\circ = \frac{h+14}{x} \Rightarrow 0,59x = h + 1,4 \Rightarrow 0,59x = (0,58x + 1,4) + 1,4$$

$$x = 280 \Rightarrow h = 163,8 \approx 164m$$

Parte 2 – Exercícios Suplementares

Questão – V.1

Solução:

$5^2 + 17^2 = 25 + 289 = 314 < 18^2 = 324$

Portanto, o triângulo é obtusângulo.

Questão – V.2

Solução:

Usando a lei dos senos temos que

$$\frac{74}{sen132^\circ} = \frac{AC}{sen18^\circ} \Rightarrow AC = 31$$

$$\frac{74}{sen132} = \frac{AB}{sen30^\circ} \Rightarrow AB = 50$$

$$S = \frac{74.31.sen30^\circ}{2} = 573,5$$

Questão – V.3 e V.4 – Estes problemas podem ser resolvidos com o mesmo raciocínio do problema 14.16 letra **a**.

Questão – V.5

Solução:

Usando a fórmula de Heron temos que

$$S = \sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)} = \sqrt{111\cdot(13)\cdot(61)\cdot(37)} \approx 1805$$

Questão – V.6 – Este problema pode ser resolvido com o mesmo raciocinio do problema 14.16 letra **b** .

Questão – V.7

Solução:

Usando a lei dos senos temos que

$$\frac{a}{sen60^\circ} = \frac{b}{sen75^\circ} = \frac{c}{sen45^\circ} = \frac{a+b+c}{sen60^\circ + sen75^\circ + sen45^\circ}$$

$$\frac{a}{sen60^\circ} = \frac{a+b+c}{sen60^\circ + sen75^\circ + sen45} \Rightarrow \frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{6+2\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{6}+2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{4}}$$

$$a = 12\cdot\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} \Rightarrow a = 12\cdot\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}\cdot\frac{-\sqrt{6}+2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{-\sqrt{6}+2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$$

$$a = \frac{12+4\sqrt{6}}{\sqrt{6}+2} \Rightarrow a = \frac{12+4\sqrt{6}}{\sqrt{6}+2}\cdot\frac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{6}-2} = 2\sqrt{6}$$

Novamente usando a lei dos senos, temos que:

$$\frac{a}{sen60^\circ} = \frac{b}{sen75^\circ} \Rightarrow \frac{2\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{b}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} \Rightarrow b = 2\sqrt{3}+2$$

$$\frac{a}{sen60^\circ} = \frac{c}{sen45^\circ} \Rightarrow \frac{2\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{c}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow c = 4$$

$$S = \frac{4.2\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{2} = 3\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)$$

Questão – V.8 – Este problema pode ser resolvido com o mesmo raciocínio do problema 14.16 letra d .

Questão – V.9

Solução:

$$\cot gB = \frac{x}{h} \quad e \quad \cot gC = \frac{y}{h}$$

$$\cot gB + \cot gC = \frac{x}{h} + \frac{y}{h} = \frac{x+y}{h} = \frac{a}{h}$$

$$h = \frac{a}{\cot gB + \cot gC}$$

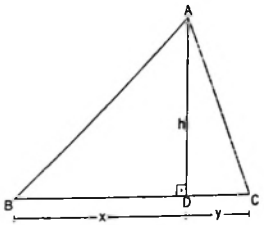


Fig. 15.

Questão – V.10

Solução:

Pela lei dos senos, temos que: $\frac{b}{senB} = \frac{c}{senC} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{senB}{senC}$

Por outro lado, temos que:

$$\frac{tgB}{tgC} = \frac{\frac{senB}{cosB}}{\frac{senC}{cosC}} = \frac{senB}{cosB} \cdot \frac{cosC}{senC} = \frac{senB}{senC} \cdot \frac{cosC}{cosB} = \frac{b}{c} \cdot \frac{\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}} = \frac{a^2+b^2-c^2}{a^2+c^2-b^2}$$

Questão – V.11

Solução:

Note que CE = d e AE = d

Então, temos que:

$$tg\alpha = \frac{DE}{d} \quad e \quad tg\beta = \frac{AE}{d} \quad \Rightarrow \quad tg\alpha + tg\beta = \frac{AE+DE}{d} = \frac{H}{d}$$

$$tg\beta = \frac{h}{d} \Rightarrow (tg\alpha + tg\beta)\cdot\frac{1}{tg\beta} = \frac{H}{d}\cdot\frac{d}{h} = \frac{H}{h} \Rightarrow H = h\cdot\left(1+\frac{tg\alpha}{tg\beta}\right)$$

Para achar o segundo resultado, basta ver que :

$$tg\beta = \frac{h}{d} \Rightarrow d = \frac{h}{tg\beta}$$

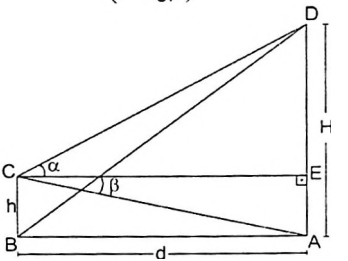


Fig. 16.

Questão – V.12

Solução:

Antes de fazermos este problema, vamos provar um lema:

Lema : Para todo x, vale que tg (90° – x) = $= \frac{1}{tgx}$.

Prova do Lema:

$$tg\,(90° - x) = \frac{sen(90°-x)}{cos(90°-x)} = \frac{cos\,x}{sen\,x} = \frac{1}{tg\,x}.$$

Agora vamos ao nosso problema:

Seja FE = DM = h

Note que $\angle FBE = \angle FAD = 90° - \alpha$

Também temos que $tg(90° - \alpha) = \frac{DM}{AM} = \frac{h}{AM}$

$$tg\alpha = \frac{FB}{h} \text{ e } tg\beta = \frac{FA}{h}$$

$$tg\alpha + tg\beta = \frac{FB}{h} + \frac{FA}{h} = \frac{FB+FA}{h} = \frac{c}{h}$$

Note que:

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \Rightarrow \frac{h}{AM} = \frac{1}{\frac{FB}{h}} \Rightarrow FB = AM \Rightarrow d = FB - FA$$

Temos que:

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{FB}{h} - \frac{FA}{h} = \frac{FB - FA}{h} = \frac{d}{h}$$

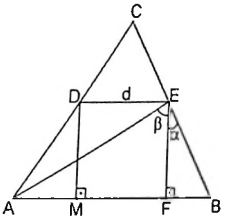


Fig.17.

Assim, temos que:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta} = \frac{\frac{c}{h}}{\frac{d}{h}} = \frac{c}{d} \Rightarrow c = d \cdot \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}$$

Capítulo 15

Funções Trigonométricas

Capítulo 15
Funções Trigonométricas

Questão – 15.7

Solução:

a) Como $-1 \leq \text{sen}\alpha \leq 1$, para todo α real temos que $-1 \leq \text{sen}3x \leq 1$

b) Como $-1 \leq \text{sen}x \leq 1$ temos que $-3 \leq 3\text{sen}x \leq 3$

c) Como $-1 \leq \text{sen}x \leq 1$ temos que $2 \leq 3 + \text{sen}x \leq 4$

d) $-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\cos x \leq 1 \Rightarrow -3 \leq 2 - \cos x \leq -1$

e) $-1 \leq \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1 \Rightarrow -4 \leq 4 \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 4 \Rightarrow -3 \leq 4 \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 5$

f) $-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq |\cos x| \leq 1$

Questão – 15.8

Solução:

a) $\sec 2x \leq -1$ ou $\sec 2x \geq 1$

b) $\sec x \leq -1 \Rightarrow -2\sec x \geq 2$ ou $\sec x \geq 1 \Rightarrow -2\sec x \leq -2$

c) $\sec 2x \leq -1 \Rightarrow -2 + \sec 2x \leq -3$ ou $\sec 2x \geq 1 \Rightarrow -2 + \sec 2x \geq -1$

d) $\text{cossec}\, x \leq -1 \Rightarrow 4\,\text{cossec}\, 2x \leq -4 \Rightarrow 2 + 4\,\text{cossec}\, 2x \leq -2$
$\text{cossec}\, x \geq 1 \Rightarrow 4\,\text{cossec}\, 2x \geq 4 \Rightarrow 2 \div 4\,\text{cossec}\, 2x \geq 6$

e) $\text{cossec}\, x \leq -1$ ou $\text{cossec}\, x \geq -1 \Rightarrow |\text{cossec}\, x| \geq 1$

f) $\text{cossec}\, x \leq -1 \Rightarrow -1 + \text{cossec}\, x \leq -2 \Rightarrow |1 + \text{cossec}\, x| \geq 2$ ou
$\text{cossec}\, x \geq -1 \Rightarrow -1 + \text{cossec}\, x \geq 0 \Rightarrow |-1 + \text{cossec}\, x| \geq 0$ Logo
$|-1 + \text{cossec}\, x| \geq 0$

Questão – 15.9

Solução:

a) $2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$

b) $x - \frac{\pi}{5} \neq k\pi \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{5} + k\pi$

c) $3x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow 3x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}$

Questão – 15.10

Solução:

a) $tg2x \neq 0 \Rightarrow sen2x \neq 0 \Rightarrow 2senx \cdot \cos x \neq 0$

Agora analisar os 2 casos:

Caso 1: $sen\, x \neq 0$

$sen\, x \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi \neq \frac{4k\pi}{4}$ (I)

Caso 2: $\cos x \neq 0$

$\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x \neq \frac{(4k+2)\pi}{4}$ (II)

Por outro lado, temos que tg 2x tem que existir logo

$\cos 2x \neq 0 \Rightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} = \frac{(2k+1)\pi}{4}$ (III)

Note que em (I) temos os números onde o numerador é múltiplo de 4, em (II) temos os números onde o numerador é um número da forma 4k + 2, e em (III) temos os números onde o numerador é da forma 4k + 1 e 4k + 3, a união desses conjuntos é $x \neq \frac{k\pi}{4}$.

b) $\operatorname{sen}x + \cos x \neq 0 \Rightarrow \operatorname{sen}x + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \neq 0 \Rightarrow 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \neq 0$

$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \Rightarrow x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi$

c) $\operatorname{cotg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \neq 0 \Rightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \neq 0 \Rightarrow x - \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + k\pi$

$x \neq \frac{5\pi}{6} + k\pi \Rightarrow x \neq \frac{(6k+5)\pi}{6}$ (I)

Por outro lado, temos que $\operatorname{cotg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ tem que existir logo:

$\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \neq 0 \Rightarrow x - \frac{\pi}{3} \neq + k\pi \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{3} + k\pi \Rightarrow x \neq \frac{(6k+2)\pi}{6}$ (II)

Note que, em (II), temos os números onde o numerador é um número da forma 6k + 2 e, em (I), temos os números onde o numerador é da forma 6k + 5, logo, a união dos conjuntos é os números da forma 3k + 2(isso já foi provado na questão 3.18) então $x \neq \frac{(3k+2)\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}$

d) $\operatorname{sen}3x + \operatorname{sen}x \neq 0 \Rightarrow 2\operatorname{sen}2x \cdot \cos x \neq 0 \Rightarrow 4\operatorname{sen}x \cdot \cos^2 x \neq 0$

Agora analisar os 2 casos:

Caso 1: $\operatorname{sen} x \neq 0$

$\operatorname{sen} x \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi \Rightarrow x \neq \frac{2k\pi}{2}$ (I)

Caso 2: $\cos x \neq 0$

$\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}$ (II)

Note que em (I) temos os números onde o numerador é par, em (II) temos os números onde o numerador é ímpar, logo a união dos conjuntos é $x \neq \frac{k\pi}{2}$.

Questão – 15.11

Solução:

$-1 \leq \text{sen}x \leq 1 \Rightarrow -3 \leq 3\text{sen}x \leq 3 \Rightarrow -4 \leq -1+3\text{sen}x \leq 2$

Logo o valor mínimo é — 4 e o valor máximo é 2.

Questão – 15.12

Solução:

Pelo exercício anterior, temos que os valor máximo da função é 4 e valor mínimo é 0.

Questão – 15.13

Solução:

$$\text{sen}x \cdot \cos x = \frac{\text{sen}2x}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \text{sen}x \cdot \cos x \leq \frac{1}{2}$$

Logo, o valor mínimo é: $4^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$.

Questão – 15.14

Solução:

$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow (0,1)^1 \leq (0,1)^{\cos x} \leq (0,1)^{-1}$

Logo, temos que o valor máximo da função é $(0,1)^{-1} = 10$.

Questão – 15.15

Solução:

$$\text{sen}x - \cos x = \text{sen}x - \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cdot \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Logo o conjunto-imagem é $\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$

Questão – 15.16

a) $f(-x) = (-x)^3 \cdot \cos(-x) = -x^3 \cdot \cos x = -\left(x^3 \cdot \cos x\right) = -f(x)$

Logo, a função é ímpar.

b) $f(-x) = (-x) \cdot tg(-x) = -x \cdot (-tgx) = x \cdot tgx = f(x)$

Logo, a função é par.

c) $f(-x) = \dfrac{tg(-3x) \div \operatorname{sen}(-x)}{\operatorname{cossec}(-2x)} = \dfrac{-tg(3x) - \operatorname{sen}(x)}{-\operatorname{cossec}(2x)} = \dfrac{tg(3x) + \operatorname{sen}(x)}{\operatorname{cossec}(2x)} = f(x)$

Logo, a função é par.

d) $f(-x) = \dfrac{(-x)^2 \cdot \operatorname{cotg}(-2x) - \operatorname{sen}(-x)}{\sec(-3x)} = \dfrac{-x^2 \cdot \operatorname{cotg}(2x) + \operatorname{sen}(x)}{\sec(3x)} =$

$$= -\left(\frac{x^2 \cdot \operatorname{cotg}(2x) - \operatorname{sen}(x)}{\sec(3x)}\right) = -f(x)$$

Logo, a função é ímpar.

Capitulo 16

Cálculo de Períodos e Construção de Gráficos

Capítulo 16
Cálculo de Períodos e Construção de Gráficos

Questão – 16.17

Solução:

a) Usando a fórmula $p = \frac{2\pi}{|a|}$ temos que $p = \frac{2\pi}{|4|} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

b) Usando a fórmula $p = \frac{2\pi}{|a|}$ temos que $p = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$

c) Usando a fórmula $p = \frac{\pi}{|a|}$ temos que $p = \frac{\pi}{|3|} = \frac{\pi}{3}$

d) Usando a fórmula $p = \frac{\pi}{|a|}$ temos que $p = \frac{\pi}{\left|\frac{2}{3}\right|} = \frac{\pi}{\frac{2}{3}} = \frac{3\pi}{2}$

e) Usando a fórmula $p = \frac{2\pi}{|a|}$ temos que $p = \frac{2\pi}{\left|\frac{3}{2}\right|} = \frac{2\pi}{\frac{3}{2}} = \frac{4\pi}{3}$

f) Usando a fórmula $p = \frac{2\pi}{|a|}$ temos que $p = \frac{2\pi}{|2\pi|} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$

g) Usando a fórmula $p = \frac{\pi}{|a|}$ temos que $p = \frac{\pi}{\left|\frac{\pi}{5}\right|} = \frac{\pi}{\frac{\pi}{5}} = 5$

h) Usando a fórmula $p = \frac{2\pi}{|a|}$ temos que $p = \frac{2\pi}{|n|}$

Questão – 16.18

Solução:

a) $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\cos 2x$

Usando a fórmula $p = \frac{2\pi}{|a|}$ temos que $p = \frac{2\pi}{|2|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

b) $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \text{sen}^2 \frac{x}{2} = 1 - 2\text{sen}^2 \frac{x}{2} \Rightarrow \text{sen}^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\cos x$

Usando a fórmula $p = \frac{2\pi}{|a|}$ temos que $p = \frac{2\pi}{|1|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

c) $\cos 4x = \cos^2 2x - \text{sen}^2 2x = 2\cos^2 2x - 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1+\cos 4x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\cos 4x$

Usando a fórmula $p = \frac{2\pi}{|a|}$ temos que $p = \frac{2\pi}{|4|} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

d) $\cos 3x = \cos^2 \frac{3x}{2} - \text{sen}^2 \frac{3x}{2} = 1 - 2\text{sen}^2 \frac{3x}{2} \Rightarrow \text{sen}^2 \frac{3x}{2} = \frac{1-\cos 3x}{2} =$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\cos 3x$

Usando a fórmula $p = \frac{2\pi}{|a|}$ temos que $p = \frac{2\pi}{|3|} = \frac{2\pi}{3}$

Questão – 16.19

Solução:

$-1 \leq \text{sen}kx \leq 1 \Rightarrow -|A| \leq |A| \cdot \text{sen}kx \leq |A| \Rightarrow |A| = 4 \Rightarrow A = \pm 4$

Usando a fórmula $p = \frac{2\pi}{|a|}$, temos que $p = \frac{2\pi}{|a|} = 6\pi \Rightarrow |a| = \frac{1}{3} \Rightarrow a = \pm\frac{1}{3}$

Logo $f(x) = 4\text{sen}\frac{x}{3}$ ou $f(x) = -4\text{sen}\frac{x}{3}$ ou $f(x) = 4\text{sen}\left(-\frac{x}{3}\right)$ ou $f(x) = -4\text{sen}\left(-\frac{x}{3}\right)$

Note que as funções $f(x) = -4\text{sen}\frac{x}{3}$ e $g(x) = 4\text{sen}\left(-\frac{x}{3}\right)$ são iguais, pois $\text{sen}\left(-\frac{x}{3}\right) = -\text{sen}\left(\frac{x}{3}\right)$.

Pelo mesmo motivo temos que $h(x) = 4\text{sen}\frac{x}{3}$ e $t(x) = -4\text{sen}\left(-\frac{x}{3}\right)$ são iguais.

Logo as únicas soluções são Logo $f(x) = 4\text{sen}\frac{x}{3}$ ou $f(x) = -4\text{sen}\frac{x}{3}$

Questão – 16.20

Solução:

Usando a fórmula $p = \frac{\pi}{|k|}$, temos que $p = \frac{\pi}{|k|} = \frac{b}{c}$, onde b e c são números inteiros tais que $\frac{b}{c}$ é positivo.

Temos que:

$\frac{\pi}{|k|} = \frac{b}{c} \Rightarrow k = \frac{c}{b} \cdot \pi = q\pi$, onde q é um número racional positivo.

Questão – 16.21

Solução:

Vamos fazer primeiro o caso $B > 0$:

$-1 \leq \text{sen}(Bx + A) \leq 1 \Rightarrow -B \leq B \cdot \text{sen}(Bx + A) \leq B$

$A - B \leq A + B \cdot \text{sen}(Bx + A) \leq A + B$

Temos que: $A - B = -3$ e $A + B = 7$, logo $A = 2$ e $B = -5$.

Agora vamos fazer o caso $B < 0$:

$-1 \leq \text{sen}(Bx + A) \leq 1 \Rightarrow -B \geq B \cdot \text{sen}(Bx + A) \geq B$

$A - B \geq A + B \cdot \text{sen}(Bx + A) \geq A + B$

Temos que: $A - B = 7$ e $A + B = -3$, logo $A = 2$ e $B = -5$.

Em qualquer caso, temos que $p = \dfrac{2\pi}{5}$.

Questão – 16.22

Solução:

a) $p_1 = \dfrac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$ e $p_2 = \dfrac{2\pi}{3}$

Note que:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{6\pi}{\frac{2\pi}{3}} = 9 \Rightarrow P = p_1 = 9 \cdot p_2 = 6\pi$$

b) $p_1 = \dfrac{\pi}{2}$ e $p_2 = \dfrac{2\pi}{\frac{5}{3}} = \dfrac{6\pi}{5}$

Note que:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{6\pi}{5}} = \frac{5}{12} \Rightarrow P = 12p_1 = 5 \cdot p_2 = 6\pi$$

c) $p_1 = \dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$ e $p_2 = \dfrac{\frac{\pi}{2}}{3} = \dfrac{3\pi}{2}$

Note que:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{3\pi}{2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow P = 3 \cdot p_1 = p_2 = \frac{3\pi}{2}$$

d) $p_1 = \dfrac{2\pi}{\frac{3}{8}} = \dfrac{16\pi}{3}$ e $p_2 = \dfrac{2\pi}{\frac{4}{5}} = \dfrac{5\pi}{2}$

Note que:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\frac{16\pi}{3}}{\frac{5\pi}{2}} = \frac{32}{15} \Rightarrow P = 15 \cdot p_1 = 32 \cdot p_2 = 80\pi$$

Questão – 16.23

Solução:

a) $p_1 = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$ e $p_2 = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

Note que:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \Rightarrow P = p_1 = p_2 = 2\pi$$

b) $p_1 = \frac{2\pi}{3}$ e $p_2 = \frac{2\pi}{3}$

Note que:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\frac{2\pi}{3}}{\frac{2\pi}{3}} = 1 \Rightarrow P = p_1 = p_2 = \frac{2\pi}{3}$$

Questão – 16.24)

Solução:

a) $p_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$ e $p_2 = \frac{2\pi}{2} = \pi$

Note que:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\pi}{\pi} = 1 \Rightarrow P = p_1 = p_2 = \pi$$

b) $\text{sen}3x = 3 \cdot \text{sen}x - 4\text{sen}^3x \Rightarrow 4\text{sen}^3x = -\text{sen}3x + 3\text{sen}x$

$$\text{sen}^3x = \left(\frac{1}{4}\right) \cdot (-\text{sen}3x + 3 \cdot \text{sen}x)$$

Assim, temos que:

$$p_1 = \frac{2\pi}{3} \quad \text{e} \quad p_2 = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$$

Note que:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\frac{2\pi}{3}}{2\pi} = \frac{1}{3} \Rightarrow P = 3p_1 = p_2 = 2\pi$$

c) $\cos\frac{3x}{2} = -3\cos\frac{x}{2} + 4 \cdot \cos^3\frac{x}{2} \Rightarrow 4\cos^3\frac{x}{2} = \cos\frac{3x}{2} + 3\cos\frac{x}{2}$

$$\cos^3\frac{x}{2} = \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\cos\frac{3x}{2} + 3\cos\frac{x}{2}\right)$$

Assim, temos que:

$$p_1 = \frac{2\pi}{\frac{3}{2}} = \frac{4\pi}{3} \quad \text{e} \quad p_2 = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$

Note que:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\frac{4\pi}{3}}{4\pi} = \frac{1}{3} \Rightarrow P = 3p_1 = p_2 = 4\pi$$

Questão – 16.25 – Veja a resposta no final do livro-texto

Questão – 16.26 – Veja a resposta no final do livro-texto

Questão – 16.27 – Veja a resposta no final do livro-texto

Questão – 16.28 – Veja a resposta no final do livro-texto

Questão – 16.29 – Veja a resposta no final do livro-texto

Capítulo 17

Funções Trigonométricas Inversas

Capitulo 17
Funções trigonométricas inversas

Parte 1 - Exercícios Propostos

Questão – 17.8

Solução:

a) Sabemos que, se α = arc sen 3x,então sen α = 3x; portanto, devemos ter:

$$-1 \le 3x \le 1 \Rightarrow -\frac{1}{3} \le x \le \frac{1}{3}$$

b) Sabemos que, se $\alpha = \text{arc cos}\left(\frac{x}{2}+3\right)$, então cos $\alpha = \left(\frac{x}{2}+3\right)$; portanto, devemos ter:

$$-1 \le \left(\frac{x}{2}+3\right) \le 1 \Rightarrow -1-3 \le \frac{x}{2} \le 1-3 \Rightarrow -4 \le \frac{x}{2} \le -2 \Rightarrow -8 \le x \le -4$$

Questão – 17.9

Solução:

a) Sabemos que o conjunto-imagem da função arc sen x é $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,isto é,

$$-\frac{\pi}{2} \le \text{arcsen}x \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{3\pi}{2} \le 3\text{arcsen}x \le \frac{3\pi}{2}.$$

b) Sabemos que o conjunto-imagem da função arc cos x é $[0,\pi]$,isto é,

$$0 \le \arccos x \le \pi \Rightarrow -2\pi \le -2\arccos x \le 0$$

c) Sabemos que o conjunto-imagem da função arc sen x é $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,isto é,

$$-\frac{\pi}{2} \le \text{arcsen}x \le \frac{\pi}{2}.$$

Note que: $-1 \le x \le 1 \Rightarrow 0 \le \sqrt{x} \le 1 \Rightarrow 0 \le \text{arcsen}\sqrt{x} \le \frac{\pi}{2}$

d) Sabemos que o conjunto-imagem da função arc cos x é $[0,\pi]$, isto é:

$$0 \le \arccos x \le \pi \Rightarrow 0 \le 3\arccos x \le 3\pi \Rightarrow -\frac{\pi}{3} \le -\frac{\pi}{3} + 3\arccos x \le -\frac{\pi}{3} + 3\pi$$

$$-\frac{\pi}{3} \le -\frac{\pi}{3} + 3\arccos x \le \frac{8\pi}{3}$$

Questão – 17.10 – Veja a resposta no final do livro-texto

Questão – 17.11

Solução:

a) Sabemos que o conjunto-imagem da função arc tg x é $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, isto é.

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad -2\pi < 4\operatorname{arctg} x < 2\pi$$

b) Sabemos que o conjunto-imagem da função arc cotg x é $(0,\pi)$, isto é:

$$0 < \operatorname{arccotg} x < \pi \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{2} + \operatorname{arccotg} x < \pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{2} + \operatorname{arccotg} x < \frac{\pi}{2}$$

c) Sabemos que o conjunto-imagem da função arc tg x é $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, isto é:

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$$

Note que: $-\infty \le x \le +\infty \Rightarrow 0 \le \sqrt{x} \le +\infty \Rightarrow 0 \le \operatorname{arctg}\sqrt{x} < \frac{\pi}{2}$

d) Sabemos que o conjunto-imagem da função arc cotg x é $(0,\pi)$, isto é:

$$0 < \operatorname{arccotg} x < \pi$$

$$-\infty \le x \le +\infty \Rightarrow 0 \le \sqrt{x} \le +\infty \Rightarrow -\infty \le -\sqrt{x} \le 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} \le \operatorname{arccotg}\left(-\sqrt{x}\right) < \pi$$

Questão – 17.12

Solução:

$f(-x) = \text{arcsen}(-x) = -\text{arcsen}(x) = -f(x)$

Portanto, a função é impar.

Questão – 17.13

Solução:

Neste caso, **f** não é nem par e nem ímpar, pois arc cos x está definida apenas no intervalo $[0,\pi]$, logo se $x \in [0,\pi]$, então – x não está no domínio, portanto, a função não está definida.

Questão – 17.14

Solução:

$f(-x) = \text{arctg}(-x) = -\text{arctg}(x) = -f(x)$

Portanto, a função é impar.

Questão – 17.15

Solução:

Neste caso f não é nem par e nem ímpar, pois arc cotg x está definida apenas no intervalo $[0,\pi]$,logo se $x \in [0,\pi]$ então – x não está no domínio portanto a função não está definida.

Parte 2 - Exercícios Suplementares

Questão – VI.1

Solução:

Primeira Parte: Determinar o domínio de f(x)
tg x tem que existir.

Logo: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $1 - tg^2 x \neq 0 \Rightarrow tgx \neq \pm 1 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$ e $x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi$

Logo: $D(f) = \left\{ x \in \Re \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \ \text{ e } \ x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi \right\}$

Seja:

$$A = \left\{ x \in \Re \mid x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \right\} = \left\{ x \in \Re \mid x \neq \frac{(1+4k)\pi}{4} \right\}$$

$$B = \left\{ x \in \Re \mid x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi \right\} = \left\{ x \in \Re \mid x \neq \frac{(3+4k)\pi}{4} \right\}$$

$$C = \left\{ x \in \Re \mid x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \right\} = \left\{ x \in \Re \mid x \neq \frac{(1+2k)\pi}{4} \right\}$$

Vamos provar que $A \cup B = C$

Primeiro passo: Provar que, $A \cup B \subset C$

Seja $\alpha \in A \cup B$, então $\alpha \in A$ ou $\alpha \in B$. Se $\alpha \in A$ temos que $\alpha = \frac{(3+4a)\pi}{4}$, para algum $a \in \mathbb{Z}$, logo $\alpha = \frac{(3+4a)\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{(1+2a)\pi}{2}$, logo $\alpha \in C$.

Se $\alpha \in B$ temos que $\alpha = \frac{(1+4b)\pi}{4}$ para algum $b \in \mathbb{Z}$, logo:

$\alpha = \frac{(1+4b)\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{2b\pi}{2}$, assim, $\alpha \in C$

Logo $A \cup B \subset C$

Segundo passo: Provar que, $C \subset A \cup B$

Seja $\beta \in C$ então, temos que $\beta = \frac{\pi}{4} + \frac{c\pi}{2}$ para algum $c \in \mathbb{Z}$. Se **c** é par então:

$c = 2d$, logo $\beta = \frac{\pi}{4} + \frac{c\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{2d\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + d\pi$, assim, $\beta \in A$.

E se c é impar, então $c = 2w + 1$, assim:

$\beta = \frac{\pi}{4} + \frac{(2w+1)\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{2w\pi}{2} = \frac{3\pi}{4} + w\pi$, logo $\beta \in B$.

Portanto $C \subset A \cup B$, logo $C = A \cup B$.

Obs.: Na verdade um pouco de conhecimento de teoria dos números evitaria essa prova. Note que, $A \cup B$ é o conjunto dos números da forma $4k + 1$ e $4k + 3$(no numerador) e C é o conjunto dos números impares (no numerador) e daí, sai trivialmente a igualdade entre os conjuntos.

Assim:

$$D(g) = \left\{ x \in \Re \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \right\}$$

Para a função g(x) devemos ter $2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$

Assim:

$$D(g) = \left\{ x \in \Re \mid x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \right\}$$

Portanto, os domínios não são os mesmos.

Questão – VI.2

Solução:

Como $f(x) = \sqrt{\text{sen}x}$, temos que:

$\text{sen}x \geq 0 \Rightarrow 0 + 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi$

Portanto, o domínio $I(f) = \{ x \in \Re \mid 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi \}$

Por outro lado, temos que :

$-1 \leq \text{sen}x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{\text{sen}x} \leq 1$

Portanto, a imagem $I(f) = \{ y \in \Re \mid 0 \leq y \leq 1 \}$

Questão – VI.3

Solução:

Como $f(x) = -\sqrt{2\cos x - 1}$, temos que:

$$2\cos x - 1 \geq 0 \Rightarrow \cos x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

Portanto, o domínio $I(f) = \left\{x \in \Re \mid -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right\}$

Por outro lado, temos que:

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 2\cos x \leq 2 \Rightarrow -3 \leq 2\cos x - 1 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{2\cos x - 1} \leq 1$$

$$\Rightarrow -1 \leq -\sqrt{2\cos x - 1} \leq 0$$

Portanto, a imagem $I(f) = \{y \in \Re \mid 0 \leq y \leq 1\}$

Questão – VI.4

Solução:

$$-1 \leq \text{sen}2x \leq 1 \Rightarrow -B \leq B\text{sen}2x \leq B \Rightarrow A - B \leq A + B\text{sen}2x \leq A + B$$

Portanto a imagem $I(f) = \{y \in \Re \mid A - B \leq y \leq A + B\}$

Questão – VI.5

Solução:

$$\sec x \geq 1 \Rightarrow B\sec x \geq B \Rightarrow A + B\sec x \geq A + B \Rightarrow A + B = -2$$

$$\sec x \leq -1 \Rightarrow B\sec x \leq -B \Rightarrow A + B\sec x \leq A + B \Rightarrow A - B = -6$$

Assim, temos que:

$$\begin{cases} A + B = -6 \\ A - B = -2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos que A = – 4 e B = 2

Questão – VI.7

Solução:

$$tgx + \cot gx = \frac{senx}{\cos x} + \frac{\cos x}{senx} = \frac{sen^2 x}{senx \cdot \cos x} + \frac{\cos^2 x}{senx \cdot \cos x} = \frac{1}{senx \cdot \cos x} =$$

$$= \frac{1}{\frac{sen2x}{2}} = \frac{2}{sen2x}$$

E, portanto, o período da função é $\frac{2\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$.

Questão – VI.8

Solução:

O período da função é $\frac{2\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{|4|} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

Questão – VI.9

Solução:

Teorema : Se p o período da função f(x) = | sen (ax + b) | ,onde a e b são números reais e a é não - nulo então

$p = \frac{\pi}{|a|}$

Prova:

Vamos fazer 2 casos

Caso 1: a > 0

Vamos primeiro tentar encontrar todos os possíveis valores de t para os quais f(x) = f(x+t) para todo x. De f(x) = f(x + t) para todo x temos, em particular, que f(t) = f(0).

Logo, f(t) = | sen(b) |, isto é , | sen(at + b) | = |sen(b)|, donde determinamos 4 famílias de candidatos a soluções:

Duas que satisfazem sen(at + b) = sen(b):

(1) $b + at = b + 2k\pi \Rightarrow t = \frac{2k\pi}{a}$

(2) $b + at = (\pi - b) + 2k\pi \Rightarrow t = \frac{\pi - 2b}{a} + \frac{2k\pi}{a}$

E duas que satisfazem sen(at + b) = – sen(b):

(3) $b + at = -b + 2k\pi \Rightarrow t = -\frac{2b}{a} + \frac{2k\pi}{a}$

(4) $b + at = (\pi + b) + 2k\pi \Rightarrow t = \frac{\pi}{a} + \frac{2k\pi}{a}$

Testando os candidatos na equação original f(x + t) = f(x) para todo x (isole o valor de a.t em cada família):

(1) Note que:

$$f(x+t) = |sen(b+ax+at)| = \left|sen\left(b+ax+a.\left(\frac{2k\pi}{a}\right)\right)\right| = |sen(b+ax+2k\pi)| =$$

$$= |sen(b+ax)| = f(x)$$

Portanto, satisfaz a equação f(x + t) = f(x)

(4) Note que:

$$f(x+t) = |sen(b+ax+at)| = \left|sen\left(b+ax+a.\left(\frac{\pi}{a}+\frac{2k\pi}{a}\right)\right)\right| = |sen(b+ax+\pi+2k\pi)| =$$

$$= |sen(b+ax+\pi)| = |-sen(b+ax)| = |sen(b+ax)| = f(x)$$

(2) Neste caso, temos que:

$$f(x+t) = |sen(b+ax+at)| = \left|sen\left(b+ax+a.\left(\frac{\pi-2b}{a}+\frac{2k\pi}{a}\right)\right)\right| =$$

$$= |sen(b+ax+\pi-2b+2k\pi)| = |sen(-b+ax+\pi+2k\pi)| =$$

$$= \left|\text{sen}(-b + ax + \pi)\right| = \left|-\text{sen}(-b + ax)\right| = \left|\text{sen}(-b + ax)\right|$$

Note que isso nem sempre é igual a f(x).

Por exemplo tome $a = 1$ e $b = \frac{\pi}{3}$

Observe que:

$$x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \left|\text{sen}(-b + ax)\right| = \left|\text{sen}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right)\right| = 0 \quad \text{e}$$

$$x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \left|\text{sen}(b + ax)\right| = \left|\text{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)\right| = \left|\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(3) Neste caso, temos que:

$$f(x + t) = \left|\text{sen}(b + ax + at)\right| = \left|\text{sen}\left(b + ax + a.\left(\frac{-2b}{a} + \frac{2k\pi}{a}\right)\right)\right| =$$

$$= \left|\text{sen}(b + ax - 2b + 2k\pi)\right| = \left|\text{sen}(-b + ax + 2k\pi)\right| =$$

$$= \left|\text{sen}(-b + ax)\right|$$

Note que isso nem sempre é igual a f(x) .

Reduzimos então a duas famílias de candidatos para período de f:

(1) $t = \frac{2k\pi}{a}$, $k \in \mathbb{Z} = \left\{\frac{2\pi}{a}, \frac{4\pi}{a}, \frac{6\pi}{a}, \ldots\right\}$, pois o período é positivo

(4) $t = \frac{\pi}{a} + \frac{2k\pi}{a}$, $k \in \mathbb{Z} = \left\{\frac{\pi}{a}, \frac{3\pi}{a}, \frac{5\pi}{a}, \ldots\right\}$, pois o período é positivo

O período é o menor desses valores portanto o período é $\frac{\pi}{a}$

Caso 2: $a < 0$

Prova: Análogo ao **caso 1**

Pelo teorema acima temos que o período da função é $\frac{\pi}{4}$

Obs.: A prova do teorema me foi enviada pelo professor Márcio Cohen (Rio de Janeiro – RJ)

Questão – VI.10

Solução:

$$p_1 = \frac{2\pi}{3} \text{ e } p_2 = \frac{2\pi}{3}$$

Note que:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\frac{2\pi}{3}}{\frac{2\pi}{3}} = 1 \Rightarrow P = p_1 = p_2 = \frac{2\pi}{3}$$

Agora, vamos calcular a imagem:

$$\text{sen}3x - \cos 3x = \text{sen}3x - \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = 2\text{sen}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\text{sen}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Logo, a imagem é: $I(f) = \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$

Questão – VI.11

Solução:

Pelo formato do gráfico ou é a função seno ou é a função cosseno

a) Se $a = 0$, temos que: $f(-\pi) = -1$

Logo: $f(x) = \text{sen } x$

b) $a = \frac{\pi}{2}$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

Logo: $f(x) = \cos x$

c) $a = -\frac{\pi}{2}$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$

Logo f(x) = – sen x

d) $a = \pi$

$f(\pi) = 1$

Logo f(x) = – cos x

Questão – VI.12

Solução:

Observando o gráfico, temos que:

A + B = 3 e A – B = 1, logo A = 2 e B = 1, logo f(x) = 2 + sen (Cx)

Novamente observando o gráfico, temos que:

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3 \Rightarrow 2 + \operatorname{sen}\frac{C\pi}{6} = 3 \Rightarrow \operatorname{sen}\frac{C\pi}{6} = 1 \Rightarrow C = 3$

Questão – VI.13 – Veja a resposta no final do livro-texto

Questão – VI.14 – Veja a resposta no final do livro-texto

Questão – VI.15 – Veja a resposta no final do livro-texto

Questão – VI.16

Solução:

a) Seja

$\arccos(x) = \alpha \Rightarrow \cos\alpha = x$

$f(x) = \alpha - \frac{\pi}{2}\ f(-x) = \arccos(-x) - \frac{\pi}{2} = \pi - \alpha - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \alpha = -f(x)$

Logo f é ímpar.

b) Seja:

$$\text{arc sen}(x) = \alpha \Rightarrow \text{sen}\alpha = x$$

$$f(x) = |\alpha| \cdot f(-x) = |\text{arcsen}(-x)| = |-\alpha| = |\alpha| = f(x)$$

Logo f é par.

c) Seja:

$$\text{arc cotg}(x) = \alpha \Rightarrow \text{cotg}\alpha = x$$

$$f(x) = \alpha - \frac{\pi}{2} \quad f(-x) = \text{arc cotg}(-x) - \frac{\pi}{2} = \pi - \alpha - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \alpha = -f(x)$$

Logo f é ímpar.

Bibliografia

[1] CARMO, Manfredo Perdigão do, et.al. Trigonometria e Números complexos. Rio de Janeiro: SBM, 1992

[2] LIDSKI, V. B. y otros, Problemas de Matemáticas Elementales, Moscou, Editora Mir, Moscow, 1972 (traduzido para o Espanhol).

[3] LITIVINENKO, V; MORDIKOVICH, A., Solving Problems in Algebra and Trigonometry, Moscou, Editora Mir Moscow, 1987.

[4] ANTAR, Aref; SAMPAIO, José Luis; LAPA, Nilton; CAVALCANTTE, Sidney, Trigonometria: Noções de Matemática, São Paulo, Editora Moderna, 1979

Breve Apêndice sobre Radical Duplo

Toda expressão da forma $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ é denominada **Radical Duplo** ou **Radical Biquadrático**.

Em muitas situações, para simplificar em muito nosso cálculo com radicais, podemos transformar um radical duplo numa soma algébrica de radicais simples. Para isso, a seguir, determinaremos os valores de x e y que satisfaçam a relação abaixo:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{X} \pm \sqrt{Y} \quad \textbf{(eq1)}$$

Para tal, precisamos que $A^2 > B$ e que B não seja um quadrado perfeito. Afinal, se B for um quadrado perfeito, a transformação do radical duplo numa soma algébrica de radicais é imediata.

Elevando a relação eq1 ao quadrado, membro a membro, vem:

$$\left(\sqrt{A \pm \sqrt{B}}\right)^2 = \left(\sqrt{X} \pm \sqrt{Y}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad A \pm \sqrt{B} = X + Y \pm 2\sqrt{X.Y}$$

Como cada membro dessa igualdade é formado por uma parte racional e uma parte irracional, elas podem ser igualadas isoladamente:

$A = X + Y$ e $\sqrt{B} = 2\sqrt{X.Y}$ e, portanto, concluímos que:

$$X + Y = A \quad \text{e} \quad X.Y = \frac{B}{4}$$

Assim, sabemos a soma e o produto de X e Y e queremos determiná-los. Para isso, podemos montar uma equação do 2º grau na variável auxiliar m cuja soluções m_1 e m_2 serão X e Y.

$$m^2 - (\text{soma}).m + (\text{produto}) = 0 \quad \Rightarrow \quad m^2 - A.m + \frac{B}{4} = 0$$

$$m = \frac{A \pm \sqrt{A^2 - B}}{2}$$

Assim, as soluções da equação serão:

$$X = m_1 = \frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2} = \frac{A + C}{2}, \quad \text{com } C = \sqrt{A^2 - B} \quad \text{e}$$

$$Y = m_2 = \frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2} = \frac{A - C}{2}, \quad \text{com } C = \sqrt{A^2 - B}.$$

Dessa forma, tendo determinado X e Y, a relação eq1 pode ser reescrita como:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{X} \pm \sqrt{Y} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}, \quad \text{com} \quad C = \sqrt{A^2 - B}$$

Note que a diferença $A^2 - B$, além de ter que ser positiva, precisa ser um quadrado perfeito. Só assim será possível transformar o radical duplo numa soma algébrica de radicais simples.

Exemplo 1: Transforme o radical duplo $\sqrt{5 \pm \sqrt{24}}$ numa soma de radicais simples.

Nesse caso, temos $A = 5$, $B = 24$ e $C = \sqrt{A^2 - B} = \sqrt{5^2 - 24} = 1$. Como $A^2 - B = 1$ é um quadrado perfeito, a simplificação do radical duplo será possível. Usando a fórmula encontrada acima, vem:

$$\sqrt{5 \pm \sqrt{24}} = \sqrt{\frac{5+1}{2}} \pm \sqrt{\frac{5-1}{2}} = \sqrt{3} \pm \sqrt{2}$$

Exemplo 2: Transforme o radical duplo $\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$ numa soma de radicais simples.

Nesse caso, teremos $\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{6 - \sqrt{20}}$, portanto, $A = 6$, $B = 20$. $C = \sqrt{A^2 - B} = \sqrt{6^2 - 20} = 4$. Como $A^2 - B = 16$ é um quadrado perfeito, a simplificação do radical duplo será possível. Usando a fórmula encontrada acima, vem:

$$\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{6 - \sqrt{20}} = \sqrt{\frac{6+4}{2}} - \sqrt{\frac{6-4}{2}} = \sqrt{5} - 1$$

Exemplo 3: Transforme o radical duplo $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ numa soma de radicais simples.

Nesse caso, temos $A = 2$, $B = 3$ e $C = \sqrt{A^2 - B} = \sqrt{2^2 - 3} = 1$. Como $A^2 - B = 1$ é um quadrado perfeito, a simplificação do radical duplo será possível. Usando a fórmula encontrada acima, vem:

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2+1}{2}} + \sqrt{\frac{2-1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$

Esse apêndice foi gentilmente escrito pelo prof. Renato Brito para abrilhantar ainda mais o presente manual de soluções escrito pelo prof. Marcilio Miranda.

RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

g°	sen	tg	cotg	cos	
0	0,000 0	0,000		1,000 0	90
1	0,017 5	0,017 5	57,29	0,999 8	89
2	0,034 9	0,034 9	28,64	0,999 4	88
3	0,052 3	0,052 4	19,08	0,998 6	87
4	0,069 8	0,069 9	14,30	0,997 6	86
5	0,087 2	0,087 5	11,43	0,996 2	85
6	0,104 5	0,105 1	9,514	0,994 5	84
7	0,121 9	0,122 8	8,144	0,992 5	83
8	0,139 2	0,140 5	7,115	0,990 3	82
9	0,156 4	0,158 4	6,314	0,987 7	81
10	0,173 6	0,176 3	5,671	0,984 8	80
11	0,190 8	0,194 4	5,145	0,981 6	79
12	0,207 9	0,212 6	4,705	0,978 1	78
13	0,225 0	0,230 9	4,331	0,974 4	77
14	0,241 9	0,249 3	4,011	0,970 3	76
15	0,258 8	0,267 9	3,732	0,965 9	75
16	0,275 6	0,286 7	3,487	0,961 3	74
17	0,292 4	0,305 7	3,271	0,956 3	73
18	0,309 0	0,324 9	3,078	0,951 1	72
19	0,325 6	0,344 3	2,904	0,945 5	71
20	0,342 0	0,364 0	2,747	0,939 7	70
21	0,358 4	0,383 9	2,605	0,933 6	69
22	0,374 6	0,404 0	2,475	0,927 2	68
23	0,390 7	0,424 5	2,356	0,920 5	67
24	0,406 7	0,445 2	2,246	0,913 5	66
25	0,422 6	0,466 3	2,145	0,906 3	65
26	0,438 4	0,487 7	2,050	0,898 8	64
27	0,454 0	0,509 5	1,963	0,891 0	63
28	0,469 5	0,531 7	1,881	0,882 9	62
29	0,484 8	0,554 3	1,804	0,874 6	61
30	0,500 0	0,577 4	1,732	0,866 0	60
31	0,515 0	0,600 9	1,664	0,857 2	59
32	0,529 9	0,624 9	1,600	0,848 0	58
33	0,544 6	0,649 4	1,540	0,838 7	57
34	0,559 2	0,674 5	1,483	0,829 0	56
35	0,573 6	0,700 2	1,428	0,819 2	55
36	0,587 8	0,726 5	1,376	0,809 0	54
37	0,601 8	0,753 6	1,327	0,798 6	53
38	0,615 7	0,781 3	1,280	0,788 0	52
39	0,629 3	0,809 8	1,235	0,777 1	51
40	0,642 8	0,839 1	1,192	0,766 0	50
41	0,656 1	0,869 3	1,150	0,754 7	49
42	0,669 1	0,900 4	1,111	0,743 1	48
43	0,682 0	0,932 5	1,072	0,731 4	47
44	0,694 7	0,965 7	1,036	0,719 3	46
45	0,707 1	1,000 0	1,000	0,707 1	45
	cos	cotg	tg	sen	g°

A Editora Vestseller tem a honra de apresentar: Solucionário - Noções de Matemática, que visa consolidar o máximo de aproveitamento da lendária obra de Aref Antar Neto, Nilton Lapa, José Luiz Pereira Sampaio e Sidney Luiz Cavallantte, a Coleção Noções de Matemática, uma obra prima em 8 volumes, que trata de todo o conteúdo da Matemática do Ensino Médio de forma primorosa, com volumes que contém teoria completa e detalhada, incluindo demonstrações de propriedades e de teoremas.

Este solucionário é composto por questões resolvidas pelo professor Marcílio Miranda autor de Problemas Selecionados de Matemática volume 1, que nos honrou em colaborar com suas horas de estudo e trabalho para garantir um livro de qualidade e indispensável para alunos e professores.

ISBN 856065323-6

9 788560 653232

EDITORA VestSeller

www.vestseller.com.br